Sur la convergence de certaines fonctionnelles de semimartingales discrétisées.

Assane Diop

Thèse de doctorat

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'université Pierre et Marie Curie, Paris VI

Spécialité : Mathématiques

par **Assane DIOP**

Sur la convergence de certaines fonctionnelles de semimartingales discrétisées

Rapporteurs : François COQUET, Philip PROTTER.

Soutenue le 15 juillet 2009 devant le jury composé de :

M.	François COQUET	Rapporteur
M.	Jean JACOD	Directeur de thèse
M.	Gilles PAGÈS	Examinateur
M.	Philip PROTTER	Rapporteur

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse Jean Jacod. Je le remercie pour sa rigueur scientifique, sa disponibilité, ses encouragements mais aussi ses qualités humaines.

Je remercie François Coquet et Philip Protter pour avoir accepté de faire un rapport su ce travail et je suis honoré par leur présence dans mon jury de thèse.

Je suis honoré également par la présence de Gilles Pagès, Président de mon Jury, je lui en remercie.

Je tiens à remercier l'ensemble du personnel du labortoire LPMA y compris mes collègues du bureau 3E03, je n'oublie pas l'équipe administrative : Jaques Portès pour sa disponibilité et son éfficacité, Josette Saman, Isabelle Mariage, Valérie Juvé, Philippe Macé,...

Je remercie les autres thésards et amis du labo pour la bonne ambiance : Alexander, Elie, Emmanuel, François, Fernando, Florent, Guanying, Kilian, Pierre-Henri, Sophie, Thanh Mai,...

Je remercie mon ancienne collègue du centre social d'Annam, Paule Lacroix Diop pour ces conseils et ses nombreux encouragements.

Je tiens à remercier mes amis du groupe d'étude de ma résidence, qui ont été et qui resteront (je l'espère) une seconde famille pour moi durant ces années : Elyes, Maryse, Myriam, Nora, Saliha, Tassadit, Yacoub, ...

Je voudrais aussi remercier tous mes amis : Al hassane Diop, Lahcen Douge, Ibrahima Gueye, Abdourahmane Kane, Mamadou Koné, Rawane Samb, Abass Sagna, Ange Toulougoussou, ...

Je remercie aussi mes amis de longues date Hamidou Ane, Masseye Gaye, Malick Ndiaye.

Je remercie ma cousine Awa Cheikh pour son soutien , ma chère soeur Ndeye Rokhaya et son Mari Pape Ndiaye.

Je tiens à remercier mon oncle Amadou qui s'est beaucoup investi dans ma venue en France, ma tante Mimi thioune, sa famille et ses amies qui m'ont accueilli et pris soin de moi quand je suis arrivé en France.

Je remercie mes frères et soeurs qui sont sénégal et mes chers parents.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse peut s'inscrire dans le cadre de la statistique des processus indicés par les temps positifs. On veut à partir de l'observation d'un processus en des temps discrets, tirer des conséquences sur les propriétés de ce processus. Concrètement, on s'intéresse à l'estimation des dont coefficients dont la loi de notre processus dépend. Les applications en pratique sont nombreuses et peuvent concerner tous les phénomènes modélisables de manières aléatoires, à partir du moment où on dispose de données avec une fréquence assez grande (de plus en plus grande).

Le but de cette thèse n'est pas de répondre directement à ces questions, mais plutôt de fournir des outils essentiels pour leur étude. Le point de départ est l'étude de la p-variation d'une semimartingale, autrement dit l'étude du comportement asymptotique des processus

$$V^n(p,X,t) \;=\; \sum_{k=1}^{k^n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right|^p, \tag{1.0.1}$$

où X est une semimartingale et où $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{k^n}^n = t$, $\sup_{i \leq k^n} \; |t_i^n - t_{i-1}^n|$ tend vers 0 et $p > 0$.

S'il est bien connu que $V(2,X,t)$ converge en probabilité vers la variation quadratique $[X,X]_t$, les choses semblent moins bien connues dès que $p \neq 2$, surtout en ce qui concerne la vitesse de convergence. Certes les probabilistes se sont intéressé très tôt à la finitude de la p-variation totale de X en t, qu'on note $W(p,X,t)$ et qu'on peut définir comme la borne supérieure de $V(p,X,t)$ sur l'ensemble des subdivisions de $[0,t]$. Paul Lévy montre en 1940 dans [15] que si B est un mouvement brownien, on a :

$$W(p,X,t) \;=\; \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad p \leq 2 \\ < \infty & \text{si} \quad p > 2 \end{cases}$$

A partir des années 1960, beaucoup d'auteurs prouvèrent des résultats sur ce sujet lorsque X est un processus de Lévy, citons par exemple Blumenthal et Getoor ([5] et [6]) et Monroe ([17]). Bretagnolle dans [7] montre que si X est un processus de Lévy de seconde caractéristique nulle et de mesure de Lévy F, la condition nécessaire et suffisante pour que $W(p,X,t)$ soit finie presque sûrement pour $p \in [1,2[$ est que

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^p \, F(dx) \ < \ \infty.$$

L'outil principal pour les démonstrations était jusque là les fonctions caractéristiques en liaison avec l'étude du comportement du processus $t^{-1}X_t$ quand t tend vers 0.

En utilisant comme technique les inégalités de Burkholder et le théorème de plongement des martingales dans le mouvement brownien, Lépingle dans [14] fut le premier à étudier le sujet dans le cadre des semimartingales. Il montre entre autres que pour toute semimartingale X, en posant

$$S(p,X,t) = \sum_{s \leq t} |\Delta X_s|^p$$

(où ΔX_s est le saut de X en s), on a :

1. Si $p > 2$, $W(p,X,t) \ < \infty$ presque sûrement, et dans ce cas

$$V^n(p,X,t) \ \longrightarrow S(p,X,t), \quad \text{en probabilité}, \tag{1.0.2}$$

2. Si $0 < p < 2$, alors $W(p,X,t) = \infty$ sur l'ensemble $\{\langle X^c \rangle_t \ > 0\} \cup \{S(p,X,t) = \infty\}$, où $\langle X^c \rangle$ est le crochet prévisible de X^c et X^c la partie martingale continue de X.

3. si $1 < p \leq 2$, $W(p,X,t) < \infty$ sur l'ensemble $\{\omega, \langle X^c \rangle_t \ = 0\} \cap \{\cup_{q<p} S(q,X,t) < \infty\}$. De plus si $1 < p < 2$, et sur $\{\langle X^c \rangle_t \ = \ 0\} \cap \{S(p,X,t) \ < \infty\}$, on a (1.0.2).

4. $W(1,X,t) < \infty$ sur l'ensemble $\{\langle X^c \rangle_t \ = 0\} \cup \{S(1,X,t) < \infty\}$

5. si $0 < p \leq 1$ et si X est une martingale locale à temps de sauts prévisibles, on a $W(p,X,t) < \infty$ sur l'ensemble $\{\omega, \langle X^c \rangle_t \ = 0\} \cap \{\cup_{q<p} S(q,X,t) < \infty\}$. De plus pour toute semimartingale X, on a :

$$0 < p \leq 1, \quad \Rightarrow \ V^n(p,X,t) \ \longrightarrow W(p,X,t).$$

Les généralisations de la p-variation se sont orientées dans deux directions : étant donnée une fonction f, il s'agit d'une part de l'étude de la somme

$$V^n(f,X,t) \ := \sum_{k=1}^{k^n} f\left(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right) \tag{1.0.3}$$

et d'autre part de la somme

$$V'^n(f,X,t) \ := \sum_{k=1}^{k^n} |t_i^n - t_{i-1}^n| f\left(\frac{X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}}{\sqrt{t_i^n - t_{i-1}^n}}\right). \tag{1.0.4}$$

Notons que si $f(x) = |x|^p$ et si la subdivision est régulière de pas Δ_n, on a $V'^n(f,X,t) = \Delta_n^{1-p/2} V^n(p,X,t)$.

Ces dernières années, l'étude de la p-variation a suscité un grand intérêt, spécialement dans le cas de subdivisions régulières de pas Δ_n comme ci-dessus, et grâce au lien établi entre la p-variation quadratique d'une semimartingale et l'estimation de la volatilité. Dans cette direction, Barndorff-Nielsen O., Shephard N. dans [1], utilisent la p-variation pour $p \neq 2$, puis la bi-variation (cf.[2]), qu'on peut définir comme suit, pour $p,\ r > 0$:

$$V'^n(p, r, X, t) \;=\; \sum_{k=1}^{k^n-1} \Delta_n^{1-\frac{r+p}{2}} \left|X_{i\Delta_n} - X_{(i-1)\Delta_n}\right|^p \left|X_{(i+1)\Delta_n} - X_{i\Delta_n}\right|^r. \tag{1.0.5}$$

et la variation multiple, pour $r_1, \cdots, r_N > 0$:

$$V'^n(r_1, \cdots, r_N; X, t) \;=\; \Delta_n^{1-\frac{r_1+\cdots+r_N}{2}} \sum_{k=1}^{k^n-N+1} \left|X_{i\Delta_n} - X_{(i-1)\Delta_n}\right|^{r_1} \cdots \left|X_{(i+N-1)\Delta_n} - X_{(i+N-2)\Delta_n}\right|^{r_N}. \tag{1.0.6}$$

Dans la suite on fait varier t, et on considère (essentiellement) des subdivisions régulières, de sorte que $k^n = k^n_t = [t/\Delta_n]$. Les variables $V^n(f, X, t)$ et $V'^n(f, X, t)$ peuvent être considérées comme les valeurs en t de processus $V^n(f, X)$ et $V'^n(f, X)$.

Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod, Podolskij et Shephard ont montré dans ([3]) que si X est une semimartingale d'Itô continue, de seconde caractéristique c et si f une fonction continue à croissance polynomiale, $V'^n(f, X)_t$ converge en probabilité, localement uniformément en temps, vers

$$V'(f, X)_t := \int_0^t \rho_{c_s}(f)\, ds,$$

où pour $x > 0$, ρ_x est la loi normale centrée de variance x, et $\rho_x(f)$ est l'intégrale de f par rapport à ρ_x. Ils établissent un théorème central limite sous la condition que $\sqrt{c_t}$ soit une semimartingale d'Itô. Sous de bonnes conditions sur f, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \Big(V'^n(f, X)_t - V'(f, X)_t \Big) \;\to \int_0^t \sqrt{\rho_{c_s}(f^2) - \rho_{c_s}(f)^2}\, d\overline{W}_s$$

stablement en loi, où $\overline{W}$ est un mouvement brownien définit sur un espace auxiliaire. Dans [8], Jacod généralise ces résultats au cas ou X est discontinu, il étudie également les processus $V^n(f, X)$. Il montre sous de bonnes conditions sur f au voisinage de l'origine la convergence de $V^n(f, X)$ en probabilité pour la topologie de Skorokhod vers le processus $\sum_{s \leq t} f(\Delta X)$, ainsi que le théorème central limite correspondant. On peut citer également Mancini [16] et Woerner [20] pour d'autres résultats de même nature.

Ce sujet ressemble aux méthodes numériques de résolutions des équations différentielles stochastiques comme le schéma d'Euler. D'ailleurs les limites obtenues dans les T.C.L. ont fait leur première apparition dans ([12]) pour précisément l'étude des schémas d'Euler.

Dans cette thèse, nous étudions une nouvelle généralisation des processus $V^n(f, X)$, $V'^n(f, X)$ mais aussi de la bi-variation. Plus précisément, on remplace la fonction f sur $\mathbb{R}$ par une ou des fonctions (réelles) f ou g sur l'ensemble $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. En d'autres termes, nous étudions les processus

$$
\begin{aligned}
V^n(f,X)_t &= \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f(\omega,(i-1)\Delta_n, X_{i\Delta_n}-X_{(i-1)\Delta_n}) \\
V'^n(f,X)_t &= \Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f\left(\omega,(i-1)\Delta_n, \frac{X_{i\Delta_n}-X_{(i-1)\Delta_n}}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \\
V'^n(f,g,X)_t &= \Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f\left(\omega,(i-1)\Delta_n, \frac{X_{i\Delta_n}-X_{(i-1)\Delta_n}}{\sqrt{\Delta_n}}\right) g\left(\omega,(i-1)\Delta_n, \frac{X_{(i+1)\Delta_n}-X_{i\Delta_n}}{\sqrt{\Delta_n}}\right).
\end{aligned}
$$

Les motivations sont les suivantes : d'une part, dans l'étude des schémas d'Euler ou de schémas plus sophistiqués des fonctionnelles de la forme précédente interviennent naturellement. D'autre part, et c'est la motivation principale, les fonctions de contraste (par exemple la log-vraisemblance) utilisées en statistique des processus conduisent aussi à des fonctionnelles de ce type. Pour donner un exemple simple, considérons la solution de l'E.D.S. suivante :

$$dX_t = \sqrt{\theta}\, \sigma(X)_s \, dW_t$$

où W est un processus de Wiener et σ est une fonction suffisamment régulière. Ce processus est observé aux temps $i\Delta_n$, et on veut estimer le paramètre inconnu $\theta > 0$. Les fonctions de contraste utilisées habituellement sont de la forme

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} g(\theta', \sigma(X^\theta_{(i-1)\Delta_n}), X^\theta_{i\Delta_n} - X^\theta_{(i-1)\Delta_n})\,)$$

pour une fonction adéquate g sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et X^θ est le processus observé pour la "vraie" valeur θ : voir par exemple ([13]) pour plus de détails. On voit ainsi la nécessité de considérer des fonctionnelles du type $V^n(f,X)$ ou $V'^n(f,X)$ avec une fonction f dépendant de ω et de t, et en particulier d'obtenir des TCL pour déduire le comportement asymptotique des estimateurs.

Les résultats obtenus dans cette thèse généralisent une partie de ceux de ([3]) et ([8]). Ils généralisent également certains des résultats obtenus par Becker dans sa thèse ([4]).

Considérons $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité munie d'une filtration et l'espace $\widetilde{\Omega}$ des trajectoires continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, $\widetilde{\mathcal{F}}$ sa tribu canonique et $\widetilde{Q}_a$ la mesure de probabilité sous laquelle le processus canonique est un brownien de variance a^2. Soit X soit un processus de diffusion de coefficient de diffusion a et

$$F \; : \; \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \widetilde{\Omega} \; \rightarrow \; \mathbb{R}.$$

Soit B_X une mesure martingale sur $\widetilde{\Omega}$ définit sur une trés bonne extension de $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. On pose alors,

$$\left.\begin{array}{lcl} A(F,X) &=& \int_0^t \widetilde{Q}_{a_s}(F_s)\, ds \\ V(F,X) &=& F \star B_X. \end{array}\right\},$$

où $F \star B_X$ est l'intégrale de f par rapport à B_X et qui vérifie

$$\langle F \star B_X \rangle_t \;=\; \int_0^t \widetilde{Q}_{a_s}\left(F^2(s,.)\right) - \widetilde{Q}_{a_s}(F(s,.))^2\, ds.$$

Si $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\Delta_i^n X = X_{i\Delta_n} - X_{(i-1)\Delta_n}$, Becker montre que

$$\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}})$$

converge en probabilité pour la topologie de Skorokhod vers $A(f,X)$ et si h une fonction de troncation, le processus

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n X) - \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\left[h\left(f((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n X)\right)|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right]$$

converge stablement en loi vers $V(f,X)$. Ces limites sont celles qu'on aura au chapitre 4.

Si maintenant X est une semimartingale sans partie martingale continue de mesure de saut μ compensée par la mesure ν et si $h'(x) = x - h(x)$, il montre la convergence en probabilité pour la topologie de Skorokhod du processus :

$$U^n(f,X)_t \;=\; \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n X) - \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\left[h\left(f((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n X)\right)|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right]$$

vers le processus

$$U(f,X) = h(f(.)) \star (\mu - \nu) + h'(f(.)) \star \mu.$$

Enfin si X est une semimartingale d'Itô, alors

$U^n(f,X)$ converge stablement en loi vers

$$U(f,X) + \overline{f} \star B_{X^c}$$

où $\overline{f}$ est telle que :

$$\forall\, \omega,\, \forall\, (t,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} f(\omega, t\sqrt{\Delta_n} y) = \overline{f}(\omega,t,y).$$

Nous verrons que ce résultat a des similarités avec les résultats de la section 3.1.2 du chapitre 3.

Les méthodes de Becker reposent sur la convergence des caractéristiques alors que les nôtres sont davantages une adaptation des méthodes utilisées dans [3] et [8].

Ce travail est organisé comme suit : dans le chapitre 2, nous faisons quelques rappels sur les semimartingales, et ce chapitre peut être omis par un lecteur familier avec les notations usuelles du sujet. Dans le chapitre 3 on étudie les processus $V^n(f,X)$. Les processus $V'^n(f,X)$ font l'objet du chapitre 4, et enfin le chapitre 5 est consacré aux bi-variations $V'^n(f,g,X)$.

Chapitre 2

Rappels sur les semimartingales

Dans ce chapitre, nous rappelons la structure des sauts d'une semimartingale discontinue, avant de faire une courte introduction à la topologie de Skorokhod. On commence par faire quelques rappels sur les processus stochastiques, dans ces rappels nous nous limitons aux éléments nécessaires à la construction de l'intégrale stochastique par rapport à une mesure aléatoire, cette dernière fera l'objet du deuxième paragraphe, alors que dans le troisième paragraphe, on donnera la décomposition d'une semimartingale discontinue. Le quatrième paragraphe est consacré à la topologie de Skorokhod et sur la convergence des processus.
Nous ne donnerons pas les preuves des résultats de ce chapitre ; celles-ci peuvent être trouvées dans [10].

2.1 Quelques rappels sur les processus stochastiques

On considère une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ (ce qui signifie un espace probabilisé muni d'une filtration croissante et continue à droite).

On désigne par :

1. $\mathcal{O}$ la tribu optionnelle sur $\Omega\times\mathbb{R}_+$ qui est la tribu engendrée par les processus adaptés, continus à droite,
2. $\mathcal{P}$ la tribu prévisible qui est la tribu engendrée par les processus adaptés continus à gauche .

Dans la définition suivante, on introduit la procédure de localisation.

Définition 2.1.1 *Soit $\mathcal{C}$ une classe de processus. On dira qu'un processus Y appartient à la classe localisée $\mathcal{C}_{loc}$ s'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêts qui croissent vers l'infini, telle que pour tout n, le processus Z^{T_n} défini par $Z_t^{T_n} = Z_{T_n\wedge t}$ appartient à $\mathcal{C}$.*

Notons qu'on a toujours $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_{loc}$. Passons aux rappels sur les martingales.

Définition 2.1.2 *Soit M et N deux martingales locales. On dira que M et N sont orthogonales, si le processus produit MN est lui même une martingale locale.*

On dira qu'une martingale locale est purement discontinue, si elle est orthogonale à toute martingale locale continue nulle en 0.

Théorème 2.1.3 *Soit* M *une martingale locale, il existe une martingale locale continue* M^c *et une martingale locale purement discontinue* M^d *avec* $M^c_0 = M^d_0 = 0$ *telles que* $M_t = M_0 + M^c_t + M^d_t$. *Cette décomposition est unique à l'indistinguabilité près.*

Passons à présent aux temps prévisibles et aux projections prévisibles.

Définition 2.1.4 *Un temps prévisible est une application* $T : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *telle que l'ensemble* $E := \{(\omega, t),\ 0 \leq t < T(\omega)\}$ *soit* $\mathcal{P}$*-mesurable.*

Un temps prévisible est donc un temps d'arrêt.

Théorème 2.1.5 *Soit* X *un processus à valeurs dans* $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, *qui est* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{R}_+$ *mesurable. Il existe alors un processus prévisible à valeurs dans* $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *appelé projection prévisible de* X *et noté* X^p *qui vérifie :* $X^p_T = E(X_T|\mathcal{F}_{T-})$ *sur* $\{T < \infty\}$ *pour tout temps prévisible* T *et qui est unique (à évanescence près).*

La projection prévisible d'un processus X mesurable est d'habitude définie quand X est borné ou positif, la définition donnée ici tirée du théorème 2.28 de [10] est une extension de la définition classique.

Il est évident que si X est prévisible et $X > -\infty$ alors $X^p = X$.

Dans la suite, on dira qu'un processus est càdlàg s'il est continu à droite et admet des limites à gauche, on dira qu'il est càg s'il est continu à gauche et làd s'il admet des limites à droite.

Définition 2.1.6 *On notera :*
$\mathcal{A}^+$ *: l'ensemble des processus* A, *réels, adaptés, càdlàg, tels que* $A_0 = 0$, *pour tout* ω *l'applicaton* $s \to A_s(\omega)$ *est croissante et tels que* $E(A_\infty) < \infty$.

$\mathcal{H}^2$ *: l'ensemble des martingales* M, *telles que* $\sup_{s\in\mathbb{R}_+} E(M_s^2) < \infty$.

A tout processus càdlàg X, on associe son processus des sauts, noté (ΔX_t), qui est défini de la façon suivante $\Delta X_t := X_t - X_{t-}$.

On rappelle que deux processus X et Y sont indistinguables si

$$\mathbb{P}\{\forall t,\ X_t = Y_t\} = 1.$$

Proposition 2.1.7 *Si* M *et* N *sont deux martingales locales purement discontinues nulles en* 0 *telles que* $\Delta M_s = \Delta N_s$ *pour tout* s, *alors* M *et* N *sont indistinguables.*

On note : $\mathcal{H}^2$ l'ensemble des martingales telles que $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathbb{E}(X_t^2) < \infty$. Rappelons que $\mathcal{H}^2_{loc}$ est la classe localisée.

Théorème 2.1.8 *Pour chaque paire (M,N) de martingales locales appartenant à $\mathcal{H}^2_{loc}$, on associe un processus prévisible $\langle M,N\rangle$ qui est càdlàg, nul en 0 et à variation localement bornée tel que $MN - \langle M,N\rangle$ est une martingale locale.*

De plus, le processus $\langle M,M\rangle$ est croissant.

Si M est une martingale, on sait que le processus (ΔM) est optionnel. Réciproquement, si on a un processus optionnel H, le théorème suivant donne les conditions sous lesquelles il existe une martingale M telle que $\Delta M = H$ (cf. théorème 4.56 (c), page 56 de [10]).

Théorème 2.1.9 *Soit H un processus optionnel tel que $H_0 = 0$. Il existe une martingale locale M telle que ΔM et H soient indistinguables si et seulement si $H^p = 0$ et $[\sum_{s\leq .}(H_s)^2]^{1/2}$ appartient à $\mathcal{A}^+_{loc}$.*

Soit X est une semimartingale, on peut l'écrire sous la forme

$$X_t = X_0 + M_t + A_t, \tag{2.1.1}$$

où A est un processus càdlàg adapté et à variation localement borné et M une martingale locale nulle en 0. D'après le théorème 2.1.3, M se décompose en une partie martingale locale continue et une partie martingale locale purement discontinue : $M = M^c + M^d$.

On dit alors que M^c est la partie martingale continue de X et on note : X^c, elle ne dépend pas (à indistinguabilité près) de la décomposition (2.1.1).

Définition 2.1.10 *Etant données deux semimartingales X et Y, on appelle co-variation (quadratique) de X et Y le processus*

$$[X,Y]_t \;=\; X_tY_t \;-\; X_0Y_0 \;-\; \int_0^t X_{s-}\,dY_s \;-\; \int_0^t Y_{s-}\,dX_s.$$

Rappelons le théorème 2.1.3, si X est une semimartingale, on note par X^c sa partie martingale continue. On a le théorème suivant :

Théorème 2.1.11 *Si X et Y deux semimartingales, on a*

$$[X,Y]_t \;=\; \langle X^c, Y^c\rangle_t \;+\; \sum_{s\leq t}\Delta X_s \Delta Y_s.$$

On termine cette partie avec la définition suivante.

Définition 2.1.12 *Nous dirons qu'un ensemble $D \in \Omega\times\mathbb{R}_+$ est mince, s'il existe une suite de temps d'arrêt (T_n) tel que $D = \bigcup_n\{(\omega,t)/\ T_n(\omega) = t\}$.*

On peut choisir la suite (T_n) de sorte que $\{(\omega,t)/\ T_n(\omega) = T_m(\omega) = t\} \;= \emptyset$ si $n \neq m$, il suffit de prendre pour nouvelle suite de temps d'arrêt la suite de temps d'arrêt

$$T'_n := \begin{cases} T_n(\omega) & si \qquad \omega \in \cap_{0\leq m\leq n-1}\{T_m \neq T_n\} \\ \infty & sinon \end{cases}$$

On dit dans ce dernier cas que la suite de temps d'arrêt (T_n) épuise l'ensemble D

2.2 Mesures aléatoires et intégrale stochastique par rapport à une mesure aléatoire

2.2.1 Mesures aléatoires

Définition 2.2.1 *On appelle mesure aléatoire sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ *une famille de mesures positives* $\mu = (\mu(\omega; dt \times dx) : \omega \in \Omega)$ *sur* $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{R}_+ \otimes \mathcal{R}^d)$ *vérifiant* $\mu(\omega; \{0\} \times \mathbb{R}^d) = 0$ *pour tout* ω.

Dans la suite, une fonction $f,\ \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sera dite optionnelle (resp. prévisible) si elle est $\mathcal{O} \otimes \mathcal{R}^d$ (resp. $\mathcal{P} \otimes \mathcal{R}^d$) -mesurable.
Soit $f:\ \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, une application optionnelle ; on définit le processus intégral de f par rapport μ par

$$f \star \mu_t(\omega) = \begin{cases} \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} f(\omega, s, x)\ \mu(\omega, ds, dx) & \text{si } \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} |f(\omega, s, x)| \mu(\omega, ds, dx)\ <\ \infty, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 2.2.2 **a.** *Une mesure aléatoire* μ *est dite optionnelle (resp. prévisible) si le processus* $f \star \mu$ *est optionnel (resp. prévisible) pour toute fonction optionnelle (resp. prévisible)* f.

b. *Une mesure aléatoire est dite* $\mathcal{P} \otimes \mathcal{R}^d$*-*$\sigma$*-finie s'il existe une suite* A_n *d'éléments de* $\mathcal{P} \otimes \mathcal{R}^d$ *qui croissent vers* $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ *et telle que pour tout* n, $E\{(1_{A_n} \star \mu)_\infty\} < \infty$.

Dans le théorème suivant, nous allons définir la mesure compensatrice d'une mesure aléatoire μ :

Théorème 2.2.3 *Etant donné une mesure aléatoire* μ*, optionnelle et* $\mathcal{P} \otimes \mathcal{R}^d$*-*$\sigma$*-finie, il existe une autre mesure aléatoire* ν *appelée mesure compensatrice de* μ*, unique aux ensembles* P*-négligeables près, prévisible et telle que, pour toute fonction positive* f *de* $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{R}_+$*, mesurable par rapport à* $\mathcal{P} \otimes \mathcal{R}^d$*, on a* $E(f \star \mu_\infty) = E(f \star \nu_\infty)$

ν est clairement $\mathcal{P} \otimes \mathcal{R}^d$-$\sigma$-finie.

On va maintenant parler d'une classe importante de mesures aléatoires : les mesures aléatoires à valeurs entières.

Définition 2.2.4 *On dira qu'une mesure aléatoire* μ *est à valeurs entières si elle vérifie les propriétés suivantes :*

a. μ *est optionnelle et* $\mathcal{P} \otimes \mathcal{R}^d$*-*$\sigma$*-finie.*

b. $\mu(\omega; \{t\} \times \mathbb{R}^d) \leq 1$ *pour tout* ω.

c. Quel que soit A *dans* $\mathcal{R}_+ \otimes \mathcal{R}^d$, $\mu(., A)$ *prend ses valeurs dans* $\overline{\mathbb{N}}$.

La proposition suivante permet d'écrire une mesure aléatoire sous la forme d'une somme de mesures de Dirac.

Proposition 2.2.5 *Une mesure aléatoire $\mathcal{P} \otimes \mathcal{R}^d - \sigma$-finie μ est à valeurs entières, si et seulement si elle s'écrit*

$$\mu(\omega; dt, dx) = \sum_{s \geq 0} 1_D(\omega, s) \varepsilon_{(s, \beta_s(\omega))}(dt, dx), \tag{2.2.2}$$

où β est un processus optionnel et D un ensemble mince.

Soit (T_n), une suite de temps d'arrêt qui épuise l'ensemble mince D et soit $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{F} \times \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^d$-mesurable telle que l'intégrale de f par rapport à μ soit finie. D'après (2.2.2), on a :

$$f \star \mu_t \;=\; \sum_{0 < s \leq t} f(s, \beta_s) 1_D(s) \;=\; \sum_{n \geq 1} f\left(T_n, \beta_{T_n}\right) 1_{\{T_n \leq t\}}. \tag{2.2.3}$$

Partant d'un processus stochastique, on peut lui associer une mesure aléatoire à valeurs entières :

Proposition 2.2.6 *Soit X un processus càdlàg, adapté. Alors*

$$\mu^X(\omega, dt \times dx) := \sum_{s \geq 0} 1_{\{\Delta X_s(\omega) \neq 0\}} \varepsilon_{(s, \Delta X_s(\omega))}(dt, dx) \tag{2.2.4}$$

définit une mesure aléatoire à valeurs entières appelée mesure des sauts de X.

Sachant que le processus (ΔX_t) est optionnel et que l'ensemble $E =: \{(\omega, t),\ \Delta X(\omega, t) \neq 0\}$ est mince, pour démontrer la proposition 2.2.6 il suffit de montrer que μ^X est $\mathcal{P} \otimes \mathcal{R}^d - \sigma$-finie et ensuite d'appliquer la Proposition 2.2.5 .

2.2.2 Intégrale stochastique par rapport à une mesure aléatoire

Soit μ la mesure aléatoire à valeurs entières définie par

$$\mu(\omega, dt \times dx) = \sum_{s \geq t} 1_D(\omega, s) \varepsilon_{(s, \beta_s(\omega))}(dt, dx)$$

où β est un processus optionnel et D est un ensemble mince. On note par ν la mesure compensatrice de μ. Soit $f :\ \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, une application $\mathcal{P} \otimes \mathcal{R}^d$-mesurable. On pose

$$\widehat{f}_t(\omega) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} f(\omega, t, x) \nu(\omega, \{t\} \times dx) & \text{si} \int_{\mathbb{R}^d} |f(\omega, t, x)| \nu(\omega, \{t\}, dx) < \infty \\ \infty & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Lemme 2.2.7 *Le processus $\widehat{f}$ est prévisible et est une version de la projection prévisible du processus $(\omega, s) \to f(\omega, s, \beta_s(\omega)) 1_D(\omega, s)$.*

On définit le processus
$$\widetilde{f_s} := f(\omega, s, \beta_s(\omega))1_D(\omega, s) - \widehat{f_s} \tag{2.2.6}$$
et l'ensemble $G(\mu)$ des fonctions $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ qui sont prévisibles et qui vérifient $\left(\sum_{s\leq .}(\widetilde{f_s})^2\right)^{1/2} \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$.

Il est évident d'après le lemme 2.2.7 que $\widetilde{f}^p = 0$. Si en plus le processus $(\widetilde{f_s})$ appartient à $G(\mu)$ alors, d'après le théorème 2.1.9 il existe une unique martingale locale purement discontinue M nulle en 0 telle que ΔM et $\widetilde{f}$ soient indistinguables.

Définition 2.2.8 *On appelle intégrale stochastique de f par rapport à $\mu - \nu$ et on note $f \star (\mu - \nu)$ la martingale locale M ci-dessus.*

Soit $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, une application prévisible. On définit
$$C(f)_t := (f - \widehat{f})^2 \star \nu_t + \sum_{s\leq t}(1 - \nu(\omega, \{t\} \times \mathbb{R}^d))(\widehat{f_s})^2. \tag{2.2.7}$$

Rappelons l'ensembble $\mathcal{A}^+$ de la définition 2.1.6 a. On va énoncer des résultats qui s'avéreront utiles par la suite.

Théorème 2.2.9 *Soit $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, une fonction $\mathcal{P} \otimes \mathcal{R}^d$-mesurable.*
a) Si $|f| \star \mu \in \mathcal{A}^+_{loc}$ ou de façon équivalente si $|f| \star \nu \in \mathcal{A}^+_{loc}$ alors $f \in G(\mu)$ et
$$f \star (\mu - \nu) = f \star \mu - f \star \nu.$$

b) La fonction f appartient à $G(\mu)$ et $f\star(\mu-\nu)$ appartient à $\mathcal{H}^2$ (rep.$\mathcal{H}^2_{loc}$) si et seulement si $C(f)$ appartient à $\mathcal{A}$ (resp.$\mathcal{A}_{loc}$) et dans ce cas :
$$\langle f \star (\mu - \nu), f \star (\mu - \nu)\rangle \ = \ C(f). \tag{2.2.8}$$

Remarque 2.2.10 *Sous les hypothèses de la partie b) du Théorème 2.2.9 et si $\widehat{f} = 0$ alors*
$$\langle f \star (\mu - \nu), f \star (\mu - \nu)\rangle \ = \ f^2 \star \nu.$$

2.3 Décomposition d'une semimartingale

Dans cette section, on présente la décomposition canonique d'une semimartingale. L'un des avantages de cette décomposition est qu'elle sépare les sauts de la semimartingale d'une part en de "petits" sauts et d'autre part en un nombre fini de grands sauts sur tout intervalle de temps fini. Cette séparation se fait à l'aide de fonctions de troncation définies ci-dessous.

Définition 2.3.1 *Une fonction de troncation est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, borélienne, bornée telle que $h(x) = x$ au voisinage de l'origine.*

Soit X une semimartingale à valeur dans $\mathbb{R}$ et h une fonction de troncation, on définit les processus

$$\left\{\begin{array}{lcl} \check{X}(h)_t &=& \sum_{s\leq t}(\Delta X_s - h(\Delta X_s)) \\ X(h) &=& X - \check{X}(h) - X_0. \end{array}\right. \tag{2.3.1}$$

En prenant les sauts dans (2.3.1), on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Delta\check{X}(h)_s &=& \Delta X_s - h(\Delta X_s) \\ \Delta X(h)_s &=& \Delta X_s - \Delta\check{X}(h) = h(\Delta X_s). \end{array}\right.$$

Comme h est bornée, les sauts de la semimartingale $X(h)$ le sont également, d'où $X(h)$ est une semimartingale spéciale. Elle se décompose alors de façon unique sous la forme :

$$X(h) = X_0 + B(h) + M(h) \tag{2.3.2}$$

où $B(h)$ est un processus prévisible à variation localement bornée et $M(h)$ est une martingale locale. On sait par ailleurs que $M(h)$ admet la décomposition $M(h) = M^c + M(h)^d$ où $M(h)^d$ est la partie martingale purement discontinue et où M^c est la partie martingale continue (M^c ne dépend pas de h). D'après l'égalité (2.3.2)

$$\Delta X(h)_s = \Delta B(h)_s + \Delta M(h)_s.$$

Or on a vu que $\Delta X(h) = h(\Delta X)$. Il suit que

$$h(\Delta X_s) = \Delta B(h) + \Delta M(h). \tag{2.3.3}$$

Remarquons que $(\Delta M(h))^p_s \equiv 0$ comme pour toute martingale locale. D'autre part vu que $B(h)$ est prévisible, il en est de même pour le processus $(\Delta B(h)_s)$ et donc $(\Delta B(h))^p = \Delta B(h)$. Il suit en passant aux projections prévisibles dans (2.3.3) que

$$(h(\Delta X_s))^p \; = \; \Delta B(h). \tag{2.3.4}$$

Notons par μ, la mesure des sauts de X et par ν, sa mesure compensatrice. En appliquant les résultats du Lemme (2.2.7) à la mesure μ et à la fonction de troncation h où (ΔX_s) va jouer le rôle du processus (β_s), on a

$$(h(\Delta X_s))^p \; = \; \widehat{h}_s \; = \; \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\; \nu(\{s\} \times dx).$$

En combinant avec (2.3.4), on a

$$\Delta B(h)_s \; = \; \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\; \nu(\{s\} \times dx). \tag{2.3.5}$$

D'autre part, (2.3.5) et (2.3.3) impliquent que

$$\Delta M(h)^d_s \; = \; h(\Delta X_s) \; - \; \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\; \nu(\{s\} \times dx) \; = \; \widetilde{h}_s.$$

Il suit d'après la définition de l'intégrale par rapport à $(\mu - \nu)$ (cf. Définition 2.2.8) que

$$M(h)^d \;=\; h \star (\mu - \nu). \tag{2.3.6}$$

Par ailleurs, (2.3.1) et (2.3.2) impliquent que

$$X_t \;=\; X(h)_t \;+\; \breve{X}(h)_t \;=\; B(h) \;+\; M(h) \;+\; \sum_{s\leq t} \left(\Delta X - h(\Delta X_s)\right),$$

il suit donc que

$$X = X_0 + \; B(h) \;+\; X^c \;+\; h \star (\mu - \nu) \;+\; h' \star \mu$$

où $h'(x) = x - h(x)$ on gardera cette notation pour la suite. On notera également X^c la partie continue de M et pour h fixé on notera B à la place de $B(h)$. A la lumière de ce qui précède, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.3.2 *Avec les notations précédentes, toute semimartingale X admet la décomposition suivante :*

$$X = X_0 + X^c + h \star (\mu - \nu) + B + h' \star \mu \tag{2.3.7}$$

Définition 2.3.3 *On appelle caractéristiques de X le triplet $(B, \langle X^c, X^c\rangle, \nu)$.*

Remarque 2.3.4 *Si X est d-dimensionnel, alors*

- *B est également d-dimensionnel,*
- *$\langle X^c, X^c\rangle$ prend ces valeurs dans l'espace des matrices de dimension $d\times d$ symetriques semi-définies positives, ses composantes sont données par $\langle X^c, X^c\rangle^{i,j} = \langle X^{c,i}, X^{c,j}\rangle$,*
- *la mesure de sauts de X, μ et sa compensatrice ν sont des mesures aléatoires sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$.*

2.4 Semimartingales d'Itô

Soit X une semimartingale d-dimensionnelle, de caractéristiques (B, C, ν), par rapport à la fonction de troncation h sur $\mathbb{R}^d$, où $C = \langle X^c, X^c\rangle$. On rappelle dans ce cas que X s'écrit comme dans (2.3.7).

Définition 2.4.1 *On dit que X est une semimartingale d'Itô si ses caractéristiques sont absoluement continues par rapport à la mesure de Lebesgue, en d'autres termes*

- *$dB_s = b_s ds$ où b est un processus prévisible, également appelé drift,*
- *$dC_s = c_s ds$ où c est un processus prévisible, prenant ses valeurs dans l'espace des matrices symetriques et semi-définies positives. c est appelé coefficient de diffusion.*
- *$\nu(\omega, ds, dx) = F_s(\omega, dx)ds$ où F est une mesure de transition de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$; il existe alors une version de F telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(1 \wedge ||x||^2\right) \, F_s(\omega, dx) \;< \infty, \quad \forall s.$$

Théorème 2.4.2 *Les deux conditions suivantes sont équivalentes*

1. X *est une semimartingale d'Itô,*
2. *Quitte à agrandir l'espace* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$*, le processus* X *peut s'écrire sous la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s\,ds + \int_O^t \sigma_s\,dW_s + h(\delta) \star (\underline{\mu} - \underline{\nu}) + h'(\delta) \star \underline{\mu}, \tag{2.4.1}$$

où

- b *est comme dans la définition 2.4.1,*
- σ *est un processus prévisible à valeurs dans* $\mathbb{R}^{d\times m}$ *tel que* $\sigma\sigma^t = c$*, où* σ^t *est la transposée de* σ *(on peut toujours choisir* $m \leq d$*).*
- W *est un mouvement brownien* m*-dimensionnel,*
- $\underline{\mu}$ *est une mesure aléatoire de Poisson sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{m'}$. $\underline{\nu}$ *est la mesure compensatrice de* $\underline{\mu}$*, elle s'écrit* $\underline{\nu}(ds, dy) = F'(dy)ds$ *où* F' *est une mesure* σ*-finie sur* $(\mathbb{R}^{m'}, \mathcal{R}^{m'})$ *de masse totale infinie (on peut toujours prendre* $m' = 1$*).*
- δ *est une application prévisible de* $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{m'}$ *dans* R^d *vérifiant*

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^{m'}} \left(1 \wedge ||\delta(\omega, s, y)||^2\right) \, F(dy)\,ds \; < \infty.$$

Remarque 2.4.3 *Si* X *est une semimartingale d'Itô, la mesure de transition* $F_s(\omega, dx)$ *introduite dans la définition 2.4.1 et la fonction* δ *qui apparaît dans (2.4.1), sont liées par la relation*

$$F_s(\omega, A) = F'\left(\delta^{-1}(\omega, s, A)\right),$$

pour tout A *appartenant à la tribu borélienne de* $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$*. D'où* $F_s(\omega, dx)$ *est la restriction à* $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ *de la mesure image de* F' *par l'application* $y \to \delta(\omega, s, y)$*.*

2.5 Topologie de Skorokhod et convergence de processus

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et E muni d'une distance. Si (X^n) et X sont des variables aléatoires à valeurs dans E, Il existe différents modes de convergence de la suite (X_n) vers la variable X tels que la convergence presque sûre, la convergence en probabilité et la convergence en loi.

Si maintenant (X^n) et (X) sont des processus, on peut évidemment parler de la convergence dans l'un des sens précédemment cité de la suite de variables (X^n_t) vers la variable X_t pour un temps t fixé. Mais cette convergence ponctuelle ne rend pas compte du comportement asymptotique de la trajectoire globale des suites (X^n). Pour régler ce problème, on a besoin de définir

- un espace de fonctions : on prendra l'espace des processus càdlàg, à valeurs dans E. On nommera cet espace $\mathbb{D}(E)$
- d'une distance sur cet espace, donc $\mathbb{D}(E)$ sera muni de sa tribu borélienne.

On pourra, alors, parler de convergence de la suite de processus (X^n) vers le processus (X).

2.5.1 L'espace topologique de Skorokhod

Définition 2.5.1 *Soit E un espace metrisable et séparable. On dira que E est un espace polonais si sa topologie peut être définie par une distance qui en fait un espace complet.*

Soit E un espace polonais. L'espace des fonctions càdlàg de $\mathbb{R}_+ \to E$ est appelé espace de Skorokhod. On le notera par $\mathbb{D}(E)$. Dans la suite de la section, l'espace polonais E est du type $\mathbb{R}^m$ où $m \in \mathbb{N}^\star$. On désigne par Λ l'ensemble des fonctions λ qui sont continues, strictement croissantes, telles que $\lambda(0) = 0$ et $\lambda(t) \to \infty$ quand $t \to \infty$.
Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on définit :

$$|||\lambda||| = \sup \left\{ \left| \log \left(\frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right) \right| ; \quad s, t \in \mathbb{R}_+, \ s < t \right\}.$$

$|||.|||$ définit une application de Λ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.
Pour chaque N appartenant à $\mathbb{N}^\star$, on définit la fonction k_N de $\mathbb{R}_+$ dans $[0, 1]$ par

$$k_N(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq N, \\ N + 1 - t & \text{si } N < t < N + 1, \\ 0 & \text{si } t \geq N + 1. \end{cases} \tag{2.5.1}$$

Pour tout α, β appartenant à $\mathbb{D}(\mathbb{R}^m)$, on définit :

$$\begin{cases} \delta_N(\alpha, \beta) &= \inf_{\lambda \in \Lambda} \left\{ |||\lambda||| \ + \ \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \|(k_N \alpha) \circ \lambda(s) - k_N(s)\beta(s)\| \right\}, \\ d_S(\alpha, \beta) &= \sum_{N \in \mathbb{N}^\star} 2^{-N} \left(1 \wedge \delta_N(\alpha, \beta)\right). \end{cases}$$

Corollaire 2.5.2 *d_S définit une distance sur $D(\mathbb{R}^m)$ appelée distance de Skorokhod.*

La distance d_S n'est pas facile à manipuler, mais on a le résultat suivant :

Corollaire 2.5.3 *Soit (α_n) et α des éléments de $D(\mathbb{R}^m)$. On a $d_S(\alpha_n, \alpha) \to 0$ si et seulement si il existe une suite (λ^n) appartenant à Λ telle que*

$$\begin{cases} \sup\{|\lambda_n(s) - s|, \quad s \in \mathbb{R}_+\} \to 0 \quad \textit{et} \\ \sup\{|\alpha_n \circ \lambda_n(s) - \alpha(s)|, \quad 0 \leq s \leq N\} \ \to 0 \quad \textit{pour tout } N \in \mathbb{N}^\star \end{cases}$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, considérons l'application (coordonnée) définie sur $D(\mathbb{R}^m)$ par $\Pi_s(\alpha) = \alpha(s)$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on notera par $\mathcal{D}_t(\mathbb{R}^m)$ la tribu sur $D(\mathbb{R}^m)$ engendrée par l'ensemble des Π_s, $s \leq t$. Posons

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) := \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{D}_t(\mathbb{R}^m).$$

On termine le paragraphe par le resultat important suivant

Théorème 2.5.4 *L'espace $\mathbb{D}(\mathbb{R}^m)$ munie de d_S est un espace polonais et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ en est la tribu borélienne.*

2.5.2 Convergence de processus

Notons par $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, la tribu borélienne de $\mathbb{D}(\mathbb{R}^m)$. Si X est un processus càdlàg, on peut le considérer comme une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{D}(\mathbb{R}^m))$. Sa loi est donnée par $\mu_X(A) = \mathbb{P}\{X \in A\}$ pour tout $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

Soit X^n et X des processus à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Comme pour les variables aléatoires, on a les définitions suivantes :

Définition 2.5.5 **a.** *On dit que les processus X^n convergent p.s. vers X au sens de Skorokhod si : pour presque tout ω, $d_S(X^n, X)$ converge vers 0 quand $n \to \infty$.*

b. *On dit que les processus X^n convergent en probabilité vers X au sens de Skorokhod si pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(d_S(X^n, X) > \varepsilon\right)$ converge vers 0 quand $n \to \infty$.*

c. *la suite X^n converge en loi vers X au sens de Skorokhod si pour toute fonction f sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}^m)$ continue et bornée , on a*

$$\int_{\mathbb{D}(\mathbb{R}^m)} f(\alpha)\, \mu_{X^n}(d\alpha) \longrightarrow \int_{\mathbb{D}(\mathbb{R}^m)} f(\alpha)\, \mu_X(d\alpha)$$

quand n tend vers l'infini.

La convergence p.s. au sens de Skorokhod implique la convergence en probabilité et la convergence en probabilité au sens de Skorokhod implique la convergence en loi au sens de Skorokhod. On va maintenant voir quelques autres modes de convergence pour les processus dont nous ferons usage dans la suite de cette thèse.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{A}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et X_n une suite de variables à valeur dans un espace polonais $(E, \mathcal{E})$.

Définition 2.5.6 *On dit que la suite (X_n) converge $\mathcal{A}$-stablement en loi (ou tout simplement stablement en loi si $\mathcal{A} = \mathcal{F}$) s'il existe une mesure de probabilité μ sur $(\Omega \times A, \mathcal{F} \otimes \mathcal{A})$ telle que pour toute variable aléatoire Y bornée, $\mathcal{A}$-mesurable et pour toute fonction f définie sur E, continue et bornée, on a*

$$\mathbb{E}\{Y f(Z^n)\} \longrightarrow \int_{\Omega \times E} Y(\omega) f(x) \mu(d\omega, dx) \quad (\textit{nécessairement} \quad \mu(d\omega, E) = \mathbb{P}(d\omega)).$$

Si une suite de processus X^n converge en probabilité au sens de Skorokhod vers X alors elle converge stablement en loi vers X.

Si (X^n) converge stablement en loi vers le processus (X) alors elle converge en loi au sens de Skorokhod vers la même limite .

Soit (X^n) et X des processus à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Définition 2.5.7 *On dira que X^n converge u.c.p. (localement uniformément en temps et en probabilité) vers X si pour tout $\varepsilon > 0$, $t \geq 0$, la quantité $\mathbb{P}\left\{\sup_{s \leq t} \|X^n_s - X_s\| > \varepsilon\right\}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.*

Si la suite de processus (X^n) converge u.c.p. vers le processus X alors elle converge en probabilité vers X au sens de Skorokhod. Si X est continue, la convergence u.c.p. est équivalent à la convergence en probabilité pour la topologie de Skorokhod.

Chapitre 3

Convergence de fonctionnelles de semimartingales non normalisées

Etant données une semimartingale X réelle, une suite (Δ_n) tendant vers 0 quand n tend vers l'infini et une fonction f de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le but de ce chapitre est d'abord d'étudier la convergence de la somme :

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f\left(\omega, (i-1)\Delta_n, X_{i\Delta_n}(\omega) - X_{(i-1)\Delta_n}(\omega)\right)$$

et ensuite, quand c'est possible, d'établir un théorème central limite associé.

3.1 Loi des grands nombres

3.1.1 Préliminaires

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, une base stochastique sur laquelle on a une semimartingale réelle X. On suppose que X a pour caractéristiques $(B(h), C, \nu)$ (où h est une fonction de troncation) et pour mesure des sauts μ.

Dans toute la suite, f désignera une application de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Commençons par une hypothèse sur f. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On note f_A la restriction à $\Omega \times \mathbb{R} \times A$ de f.

Hypothèse $(K[A])$ **:** l'application $f_A(\omega, t, x)$ est continue en x et admet des limites à gauche en t notées $f_A(\omega, t-, x)$. De plus, si $x_n \to x$ dans A et $t_n \to t$, $t_n < t$, alors $f_A(\omega, t_n, x_n) \to f(\omega, t-, x)$. $\square$

Définition 3.1.1 *On dira que f est localement équicontinue sur A (localement en temps), si pour tout $(\omega, T, x_0) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \times A$, la famille de fonctions $(x \to f_A(\omega, s, x))_{s\in[0,T]}$ est équicontinue en x_0.*

Remarque 3.1.2 *Si f est localement équicontinue en A (au sens de la définition précédente) et si l'application $s \rightarrow f_A(\omega, s, x)$ admet des limites à gauche, alors f vérifie $(K[A])$.*

Quelques notations

1. On notera par I l'ensemble des réels $r \geq 0$ tels que

$$\int\int_{[0,t]\times\mathbb{R}} (|x|^r \wedge 1) \star \nu(ds, dx) < \infty$$

presque sûrement et pour tout t. Notons que I contient toujours 2 et, est toujours un intervalle de la forme $]\alpha, \infty[$ ou $[\alpha, \infty[$ pour $\alpha \in [0, 2]$ et α est appelé indice de Blumenthal-Getoor de X.

2. Si $1 \in I$ et si h est une fonction de troncation alors $h \star \nu$ est bien définie et est à valeurs finies, de même que $h \star \mu$, de plus (2.3.7) devient :

$$X_t = X_0 + X_t^c + \overline{B}_t + \sum_{s\leq t} \Delta X_s, \tag{3.1.1}$$

où

$$\overline{B}_t = B_t - h \star \nu_t, \quad \overline{B} \text{ est dans ce cas le "véritable" drift.}$$

3. On note $\Delta_i^n X := X_{i\Delta_n} - X_{(i-1)\Delta_n}$.

Proposition 3.1.3 *Soit X une semimartingale ayant pour mesure de sauts μ. On désigne par ν, la mesure compensatrice de μ. Si f est $\mathcal{F} \otimes \mathcal{R}_+ \otimes \mathcal{R}$-mesurable et s'il existe $\varepsilon > 0$, Γ un processus localement borné et r un réel appartenant à I tels que : $|f(s, x)| \leq \Gamma_s |x|^r$ si $|x| \leq \varepsilon$. Alors le processus*

$$f \star \mu_t = \sum_{s\leq t} f(s, \Delta X_s)$$

est presque sûrement à valeurs finies.

Preuve

On a :

$$\sum_{s\leq t} |f(s, \Delta X_s)| = \sum_{s\leq t} |f(s, \Delta X_s)| 1_{\{|\Delta X_s| \leq \varepsilon\}} + \sum_{s\leq t} |f(s, \Delta X_s)| 1_{\{|\Delta X| > \varepsilon\}}.$$

Pour tout ω, il existe un nombre fini de sauts entre $[0, t]$ qui sont plus grands que ε, donc

$$\sum_{s\leq t} |f(s, \Delta X_s)| 1_{\{|\Delta X_s| > \varepsilon\}} < \infty.$$

Il nous reste à montrer que

$$\sum_{s\leq t} |f(s, \Delta X_s)| 1_{\{|\Delta X_s| \leq \varepsilon\}} < \infty.$$

Or

$$\sum_{s\le t}|f(s,\Delta X_s)|1_{\{|\Delta X_s|\le\varepsilon\}}\le \Gamma_t^\star\sum_{s\le t}|\Delta X|^r 1_{\{|\Delta X_s|\le\varepsilon\}}$$

où $\Gamma_t^\star=\sup\{|\Gamma_s|,\ s\le t\}$. Il suffit donc de montrer que

$$\sum_{s\le t}|\Delta X|^r 1_{\{|\Delta X_s|\le\varepsilon\}}\ <\ \infty.$$

Comme $r\in I$ alors $\left(|x|^r 1_{\{|x|\le\varepsilon\}}\right)\star\nu_t$ est un processus croissant, càdlàg et à sauts bornés par ε, il suit alors que $\left(|x|^r 1_{\{|x|\le\varepsilon\}}\right)\star\nu_t$ appartient à $\mathcal{A}_{\text{loc}}$ (voir le chapitre 2 pour $\mathcal{A}_{\text{loc}}$). Il existe une suite (T_p) de temps d'arrêt notée (T_p) qui croissent vers l'infini et tels que pour tout p,

$$E\left\{\left(|x|^r 1_{\{|x|\le\varepsilon_0\}}\right)\star\mu_{t\wedge T_p}\right\}\ =\ \mathbb{E}\left\{\left(|x|^r 1_{\{|x|\le\varepsilon_0\}}\right)\star\nu_{t\wedge T_p}\right\}\ <\infty$$

d'où $\sum_{s\le\ t\wedge T_p}|\Delta X_s|^r 1_{\{|\Delta X_s|\le 1\}}\ <\infty$ presque sûrement pour tout p. En faisant tendre p vers l'infini, on en déduit le résultat.

3.1.2 Résultats

Le premier théorème peut être vu comme une généralisation de certains résultats dûs à Lépingle (voir [14]).

Théorème 3.1.4 *Soit X une semimartingale de caractéristiques (B,C,ν) et f une application optionnelle telle que $f(\omega,s,0)\equiv 0$. On suppose que f vérifie $(K[\mathbb{R}])$ et qu'il existe un voisinage V_0 de 0 tel que l'application $x\to f(\omega,s,x)$ soit C^2 sur V_0. On suppose également que*

- *$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ vérifient $(K[V_0])$.*
- *Il existe un processus localement borné Γ tel que*

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(s,0)|\ +\ \sup_{\{x\in V_0\}}\ |\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,x)|\ \le\ \Gamma_s$$

Alors quand $n\to\infty$, la somme

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f((i-1)\Delta_n,\Delta_i^n X)$$

converge en probabilité pour la topologie de Skorokhod vers le processus

$$\begin{aligned}D(f)_t^1\ \ :=\ \ &\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}(s-,0)\,dB_s+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s-,0)\,dC_s+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}(s-,0)\,dX_s^c\ +\\ &\left(\frac{\partial f}{\partial x}(s-,0)h(x)\right)\star(\mu-\nu)_t+\sum_{0<s\le t}\left[f(s-,\Delta X_s)-h(\Delta X_s)\frac{\partial f}{\partial x}(s-,0)\right].\end{aligned}$$

Théorème 3.1.5 *Soit X une semimartingale de caractéristiques $(B, 0, \nu)$ (ici $C \equiv 0$) et f, une application optionnelle, vérifiant $(K[\mathbb{R}])$ et telle que $f(\omega, u, 0) \equiv 0$. On suppose qu'il existe un voisinage V_0 de 0 tel que l'application $x \to f(\omega, u, x)$ soit dérivable sur V_0. On suppose également que*

- *le processus $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\omega, s, 0)\right)$ est localement borné,*
- *pour tout x appartenant à V_0, le processus $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(s, x)\right)$ admet des limites à gauche,*
- *il existe $p \in]1, 2[\cap I$ et un processus Γ localement borné tels que pour tout $u > 0$, x_1 et $x_2 \in V_0$ on ait*

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(\omega, s, x_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(\omega, s, x_2)| \leq \Gamma_s |x_1 - x_2|^{p-1}.$$

Alors quand $n \to \infty$, la somme

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n X)$$

converge en probabilité pour la topologie de Skorokhod vers le processus $D^1(f)$ précédent qui s'écrit ici

$$D^1(f)_t = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s-, 0)\, dB_s + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s-, 0) h(x)\right) \star (\mu - \nu)_t + \sum_{0 < s \leq t} \left[f(s-, \Delta X_s) - h(\Delta X_s) \frac{\partial f}{\partial x}(s-, 0) \right].$$

Pour un processus Y donné, on note $Y^{(n)}$ le processus tel que $Y_t^{(n)} := Y_{[t/\Delta_n]\Delta_n}$.

Pour $1 \in I$, on pose $\bar{B} = B - h \star \nu$.

Théorème 3.1.6 *Soit X une semimartingale telle que $1 \in I$ et ayant pour caractéristiques $(B, 0, \nu)$. Soit $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application optionnelle, telle que $f(\omega, u, 0) \equiv 0$. On suppose que f vérifie l'hypothèse $(K[\mathbb{R}])$ et que l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. *il existe un voisinage ouvert V_0 de 0 tel que l'application $x \to f(\omega, s, x)$ soit dérivable sur V, de plus*
$$\frac{\partial f}{\partial x}(\omega, s, x) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(\omega, s) \;=\; \gamma_u(\omega),$$
ne dépend pas de x, où γ est un processus localement borné et admettant des limites à gauches.
2. *$\bar{B} = 0$, il existe $p \in]0, 1] \cap I$, un voisinage V_0 de 0 et un processus Γ localement borné tel que*
$$\forall u \geq 0, \quad x_1, x_2 \in V_0, \quad |f(u, x_1) - f(u, x_2)| \leq \Gamma_u |x_1 - x_2|^p.$$
3. *0 appartient à I et $\bar{B} = 0$*

Alors quand $n \to \infty$, la somme

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n X) \;-\; D^1(f)_t^{(n)}$$

converge localement uniformément vers 0*, avec le processus* $D^1(f)$ *qui prend la forme :*

$$D^1(f)_t = \sum_{0<s\leq t} f(s-,\Delta X_s) \; + \; \int_0^t \gamma_s \, \overline{B}_s.$$

Il s'en suit que la suite de processus

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n X)$$

convergence pour la topologie de Skorokhod vers le processus $D^1(f)$*.*

Remarque 3.1.7 *Les sauts du processus* $D^1(f)$ *sont donnés par*

$$\Delta D^1(f)_t \;=\; f(t-,\Delta X_t).$$

Comme $f(t-,0) \equiv 0$*, on en déduit que les temps de saut du processus* $D^1(f)$ *sont des temps de saut de* X *lui même.*

Remarque 3.1.8 *Sous les hypothèses du théorème 3.1.4 et si* $\frac{\partial f}{\partial x}(\omega,s,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\omega,s,0) \equiv 0$ *alors*

$$D^1(f)_t = \sum_{0\leq s\leq t} f(s-,\Delta X_s). \tag{3.1.2}$$

Dans le dernier théorème, la convergence obtenue est une convergence uniforme en compacte. Dans le théorème qui va suivre, on va voir d'autres cas où on a également une convergence uniforme.

On pose ici :

$$D^1(f)_t = \sum_{0<s\leq t} f(s-,\Delta X_s).$$

Théorème 3.1.9 *Soit* X *une semimartingale ayant pour caractéristique* (B,C,ν) *et soit* $f : \Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une fonction optionnelle vérifiant* $(K[\mathbb{R}])$ *et telle que* $f(\omega,u,0)\equiv 0$*. Alors la suite de processus*

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n X) \;-\; D^1(f)_t^{(n)}$$

converge localement uniformément vers 0*, d'où la suite de processus*

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n X)$$

convergence vers $D^1(f)$ *au sens de Skorokhod dans les cas suivants :*

1. *Il existe un voisinage de* 0*, un processus* Γ *localement borné et un réel* $p > 2$ *tel que*

$$|f(\omega, s, x)| \leq \Gamma_s(\omega)|x|^p, \quad \forall\, x \in V.$$

2. $X^c \equiv 0$*, il existe un voisinage de* 0*, un processus* Γ *localement borné et un réel* $1 < p \leq 2$ *tel que*

$$|f(\omega, s, x)| \leq \Gamma_s(\omega)|x|^p, \quad \forall\, x \in V$$

   de plus, il existe un réel q *vérifiant* $q < p$ *et* $q \in I$*.*

3.2 Théorème central Limite

3.2.1 Hypothèses et Notations

Quitte à élargir notre espace $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_t)$, on suppose que celui-ci contient un mouvement brownien W et une mesure aléatoire de Poisson $\underline{\mu}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On note $\underline{\nu}$ la mesure compensatrice de $\underline{\mu}$ et on suppose que $\underline{\nu}(ds, dx) = F(dx)ds$ où F est une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}$ et de masse totale infinie. On ne sait pas démontrer un théorème central limite pour une semimartingale quelconque, il est nécessaire de supposer que X est une semimartingale d'Itô vérifiant quelques hypothèses supplémentaires.

Hypothèse (H_1) On suppose que X s'écrit

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + h(\delta) \star (\underline{\mu} - \underline{\nu})_t + h'(\delta) \star \underline{\mu}_t. \tag{3.2.1}$$

où

- (b_t) est un processsus localement borné et prévisible.
- σ est un processus càdlàg, adapté.
- $\delta : \ \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application prévisible qui vérifie : il existe une suite de temps d'arrêt (T_k) croissant vers l'infini et une suite de fonctions déterministes réelles (γ_k) telles que pour tout k, on ait

$$\int_{\mathbb{R}} \min(1, \gamma_k^2(x))\, F(dx) < \infty \quad \text{et} \quad |\delta(\omega, s, x)| \leq \gamma_k(x) \ \text{ si } s \leq T_k(\omega).$$

□

Soit $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ un espace auxiliaire muni de deux suites (U_p) et (U_p') de variables gaussiennes standards et d'une suite de variables uniformes (κ_p) sur $]0, 1[$. On suppose que ces variables sont mutuellement indépendantes.

Posons

$$\widetilde{\Omega} = \Omega \times \Omega', \quad \widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', \quad \widetilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}'$$

Les variables définies sur Ω où Ω' peuvent être considérées comme définies sur $\widetilde{\Omega}$. Soit (S_p) une suite de temps d'arrêt définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ et qui épuise les sauts de X. On définit sur $\widetilde{\Omega}$ une filtration $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)$ qui est la plus petite filtration continue à droite, contenant $(\mathcal{F}_t)$ et telle que les variables U_p, U_p' et κ_p soient $\widetilde{\mathcal{F}}_{S_p}$ mesurables pour tout p.

3.2.2 Résultats

Théorème 3.2.1 *Soit X un processus vérifiant (H_1) et f une application de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, optionnelle et telle que l'application $x \to f(\omega, s, x)$ soit C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $f(\omega, u, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\omega, u, 0) \equiv 0$. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifie $(K(\mathbb{R}))$. On suppose également qu'il existe un voisinage V_0 de 0 tel que l'application $x \to f(\omega, s, x)$ soit C^2 sur V_0 et qu'il existe un processus Γ localement borné tel que $|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\omega, s, x)| \leq \Gamma_s(\omega)|x|\epsilon(x)$ où $\epsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$.*

A. *les processus*

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \left\{ \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \left[f((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n X) - \sum_{(i-1)\Delta_n < s \leq i\Delta n} f((i-1)\Delta_n, \Delta X_s) \right] \right\}$$

convergent stablement en loi vers le processus

$$D^2(f)_t \ := \ \sum_{p: S_p \leq t} \frac{\partial f}{\partial x}(S_p-, \Delta X_{S_p}) \left(\sqrt{\kappa_p} U_p \sigma_{S_p-} + \sqrt{1-\kappa_p} U_p' \sigma_{S_p} \right) \qquad (3.2.2)$$

B. *Si de plus il existe $\alpha > \frac{1}{2}$ et un processus croissant localement borné θ tels que*

$$|f(\omega, s, x) - f(\omega, t, x)| \ \leq \ \theta_T |t-s|^\alpha x^2, \quad \forall \ s, \ t \ \in [0, T], \qquad (3.2.3)$$

on a la convergence stablement en loi des suites de processus

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \left\{ \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n X) \ - \sum_{0 < s \leq [t/\Delta_n]\Delta_n} f(s-, \Delta X_s) \right\}$$

vers le processus $D^2(f)$.

Le lemme suivant, qui n'est rien d'autre qu'une généralisation du lemme 5.10 de [8], donne quelques propriétés de $D^2(f)$. On pose

$$\begin{aligned} C(f)_t \ &:= \ \widetilde{\mathbb{E}}\left(D^2(f)_t^2 | \mathcal{F}\right) = \frac{1}{2} \sum_{p: S_p \leq t} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(S_p-, \Delta X_{S_p}) \right)^2 \left(\sigma_{S_p}^2 \ + \ \sigma_{S_p-}^2 \right) \\ &= \ \frac{1}{2} \sum_{s \leq t} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s-, \Delta X_s) \right)^2 \left(\sigma_s^2 + \sigma_{s-}^2 \right). \end{aligned} \qquad (3.2.4)$$

Lemme 3.2.2 *Supposons les hypothèses du théorème 3.2.1 vérifiées. Le processus $C(f)$ est à valeurs finies et $D^2(f)$ est une semimartingale sur l'espace étendu $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}_t})_{t \geq 0}, \widetilde{\mathbb{P}}\right)$. Si en plus $C(f)$ est localement intégrable alors $D^2(f)$ est une martingale locale et dans ce cas*

$$\mathbb{E}\left(\left(D^2(f)_T\right)^2 \right) \ = \ \mathbb{E}\left(C(f)_T\right), \quad \forall \ T, \ \textit{temps d'arrêt de } (\mathcal{F}_t). \qquad (3.2.5)$$

On a également :

a. *Conditionnellement à $\mathcal{F}$, le processus $D^2(f)$ est une martingale de carré intégrable, nul en 0 à accroissements indépendants et son crochet prévisible par rapport à la filtration $(\mathcal{F} \vee \widetilde{\mathcal{F}}_t)$ est $C(f)$. Sa loi conditionnelle est complètement caractérisée par les processus X et σ et ne dépend pas du choix des S_n.*

b. *Si X et σ n'ont pas de sauts en commun, alors conditionnellement à $\mathcal{F}$, le processus $D^2(f)$ est une martingale gaussienne centrée.*

3.3 Convergence pour une fonction auxiliaire

L' hypothèse 3.2.3 du théorème 3.2.1 peut s'avérer un peu restrictive, on ne peut pas par exemple appliquer ce théorème à des fonctions f du type :

$$f(\omega, s, x) = g(Z_s(\omega), x), \tag{3.3.1}$$

où Z est une semimartingale d-dimensionnelle et g est une fonction de $\mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$. Dans cette partie on essaie d'établir un théorème central limite pour ces types de fonctions.

Dans toute la suite, g est une fonction de $\mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ et f est définie par (3.3.1).

Rappelons le processus $D^1(f)$ défini dans le théorème 3.1.4. Si f vérifie (3.3.1), on le note également $D^1(g, Z)$. Une simple application du théorème 3.1.4 nous donne le théorème suivant :

Théorème 3.3.1 *Soit X une semimartingale de caractéristiques (B, C, ν) et soit Z un processus d-dimensionnel, adapté admettant des limites à gauche et localement borné. On suppose que $g(z, 0) \equiv 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ et qu'il existe un voisinage V_0 de 0 tel que : pour tout $z \in \mathbb{R}^d$, la fonction $g(z, .)$ est deux fois dérivables sur V_0 et $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^d \times V_0$.*

Alors quand $n \to \infty$, le processus $\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} g(Z_{(i-1)\Delta_n}, \Delta_i^n X)$ converge en probabilité pour la topologie de Skorokhod vers le processus

$$\begin{aligned} D^1(g, Z)_t \;\; = \;\; & \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(Z_{s-}, 0) dB_s \; + \; \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(Z_{s-}, 0) dC_s \; + \; \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(Z_{s-}, 0) dX_s^c \\ & + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(Z_{s-}, 0) h(x) \right) \star (\mu - \nu)_t \; + \sum_{0 \le s \le t} \left[g(Z_{s-}, \Delta X_s) \; - \; h(\Delta X_s) \frac{\partial g}{\partial x}(Z_{s-}, 0) \right] \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Remarque 3.3.2 *Sous les hypothèses du théorème 3.3.1 et si X vérifie l'hypothèse (H_1) alors*

$$\begin{aligned} D^1(g, Z)_t \;\; = \;\; & \int_0^t b_s \frac{\partial g}{\partial x}(Z_{s-}, 0) ds \; + \; \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(Z_{s-}, 0) ds \; + \; \int_0^t \sigma_{s-} \frac{\partial g}{\partial x}(Z_{s-}, 0) dW_s \\ & + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(Z_{s-}, 0) h(\delta(s, x)) (\underline{\mu} - \underline{\nu})(dx, ds) \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [g(Z_{s-}, \delta(s, x)) - h(\delta(s, x)) \frac{\partial g}{\partial x}(Z_{s-}, 0)] \underline{\mu}(ds, dx). \end{aligned}$$

Si de plus, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(z,0) = \frac{\partial g}{\partial x}(z,0) \equiv 0$ *pour tout* $z \in \mathbb{R}^d$ *alors*

$$D^1(g,Z)_t = \sum_{s\le t} g(Z_{s-},\Delta X_{s-}). \tag{3.3.3}$$

Soit k est une fonction de troncation dans $\mathbb{R}^{d+1}$. On pose : $k'(z) := z - k(z)$.

Dans le paragraphe (3.2), on avait supposé que le processus X vérifiait l'hypothèse (H_1) et en particulier que c'était une semimartingale d'Itô. Dans cette partie, on suppose que Z est aussi une semimartingale d'Itô, ce qui revient à dire que le couple (Z,X) est d'Itô. On suppose en outre que le couple (Z,X) vérifie une hypothèse du type (H_1), pour être plus précis, on fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse N_1 **:** Le couple (Z,X) se met sous la forme :

$$\begin{pmatrix} Z_t \\ X_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_0 \\ X_0 \end{pmatrix} + \int_0^t b'_s ds + \int_0^t \sigma'_{s-} dW'_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} k\left(\delta'(s,x)\right)(\underline{\mu}-\underline{\nu})(ds,dx) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} k'\left(\delta'(s,x)\right)\underline{\mu}(ds,dx)$$

où

- b' est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$, prévisible, localement borné .
- W' est un mouvement brownien m-dimensionnel.
- σ' est un processus càdlàg, adapté, prenant ses valeurs dans l'espace des matrices de dimensions $(d+1)\times m$
- δ' est une application de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d+1}$, prévisible. On suppose de plus qu'il existe une suite de temps d'arrêt (S_k) qui croissent vers l'infini et une suite de fonctions boréliennes (γ_k) telles que

$$\|\delta'(\omega,s,x)\| \le \gamma_k(x) \text{ si } s \le S_k(\omega) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge \gamma_k(x)^2\right) F(dx) < \infty.$$

Remarque 3.3.3 *L'hypothèse* (N_1) *implique l'hypothèse* (H_1).

On rappelle que (T_p) est une suite quelconque de temps d'arrêt qui épuisent les sauts de X. On considère un espace auxiliaire $(\Omega',\mathcal{F}',\mathbb{P}')$ sur lequel sont définies une suite (κ_p) de variables de loi unifome sur $]0,1[$ et des suites $(V_{k,p},V'_{k,p})_{1\le k\le m}$ de variables gaussiennes standard. On suppose de plus les variables (κ_p) et $\Big((V_{k,p},V'_{k,p})_{\{1\le k\le m\}}\Big)$ mutuellement indépendantes.

Comme dans la sous-section 3.2, on définit :

$$\widetilde{\Omega} = \Omega\times\Omega', \quad \widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}\otimes\mathcal{F}', \quad \widetilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P}\otimes\mathbb{P}'.$$

On définit sur $\widetilde{\Omega}$ la filtration $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)$ qui est la plus petite filtration continue à droite, contenant $(\mathcal{F}_t)$ et telle que les variables $V_{k,p},\ V'_{k,p}$ et κ_p soient $\widetilde{\mathcal{F}}_{S_p}$ mesurables pour tout p appartenant à $\mathbb{N}^\star$ et k appartenant à $\{1,\cdots,m\}$.

Théorème 3.3.4 *Supposons que le couple (X,Z) vérifie l'hypothèse (N_1) et que la fonction g soit C^1 sur $\mathbb{R}^{d+1}$ et C^3 sur $\mathbb{R}^d\times V_0$ pour un voisinage V_0 de 0 et vérifie :*

$$\forall\ z\in\mathbb{R}^d,\quad g(z,0)=\frac{\partial g}{\partial x}(z,0)=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(z,0)=\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}(z,0)\ \equiv\ 0.$$

Alors quand $n\to\infty$, les processus

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\left[\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} g(Z_{(i-1)\Delta_n},\Delta_i^n X)-D^1(g,Z)_{[t/\Delta_n]\Delta_n}\right]$$

convergent stablement en loi vers le processus

$$\begin{aligned}F_t\ \ :=\ \ &\sum_{p:\ T_p\le t}\ \sum_{k=1}^{m}\left[\left(\sigma_{T_p}^{\prime d+1,k}\ V'_{k,p}\ \sqrt{1-\kappa_p}\ +\ \sigma_{T_p-}^{\prime d+1,k}\ V_{k,p}\ \sqrt{\kappa_p}\ \right)\frac{\partial g}{\partial x}\left(Z_{T_p-},\Delta X_{T_p}\right)\right.\\ &\left.-\ \sqrt{\kappa_p}\ V_{k,p}\ \sum_{j=1}^{d}\sigma_{T_p-}^{\prime j,k}\ \frac{\partial g}{\partial z^j}(Z_{T_p-},\Delta X_{T_p})\right].\end{aligned}$$

Remarque 3.3.5 *Notons que d'après nos hypothèses sur g, pour tout $z\in\mathbb{R}^d$ et $j=1,\cdots,d$, on a $\frac{\partial^2 g}{\partial z^j\partial x}(z,0)=\frac{\partial^3 g}{\partial z^j\partial x^2}(z,0)=\frac{\partial^3 g}{\partial {z^j}^2\partial x}(z,0)\equiv 0$. Un exemple de fonction qui vérifie les hypothèses de l'énoncé dans le cas où $d=1$ est la fonction $(z,x)\to g(z,x)=zx^4$.*

On va dans le lemme suivant, énoncer quelques propriétés de F comme on l'a fait pour $D^2(f)$ dans le lemme 3.2.2. On définit

$$\begin{aligned}C(g,Z)_t\ \ =\ \ &\sum_{p:\ T_p\le t}\ \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{2}\left(\left(\sigma_{T_p}^{\prime d+1,k}\right)^2+\left(\sigma_{T_p-}^{\prime d+1,k}\right)^2\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x}\left(Z_{T_p-},\Delta X_{T_p}\right)\right)^2\right.\\ &+\sum_{j=1}^{d}\left(\frac{1}{2}\ \sigma_{T_p-}^{\prime j,k}\ \frac{\partial g}{\partial z^j}(Z_{T_p-},\Delta X_{T_p})-\sigma_{T_p-}^{\prime d+1,k}\ \frac{\partial g}{\partial x}(Z_{T_p-},\Delta X_{T_p})\right)\sigma_{T_p-}^{\prime j,k}\ \frac{\partial g}{\partial z^j}(Z_{T_p-},\Delta X_{T_p})\\ &\left.+\sum_{1\le j<j'\le d}\sigma_{T_p-}^{\prime j,k}\ \sigma_{T_p-}^{\prime l,k}\ \frac{\partial g}{\partial z^j}(Z_{T_p-},\Delta X_{T_p})\ \frac{\partial g}{\partial z^l}(Z_{T_p-},\Delta X_{T_p})\right]\end{aligned}\tag{3.3.4}$$

Lemme 3.3.6 *Supposons les hypothèses du théorème 3.3.4 vérifiées. Alors le processus $C(g,Z)$ est à valeurs finies et F est une semimartingale sur l'espace étendu $\left(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},(\widetilde{\mathcal{F}_t})_{t\ge 0},\widetilde{\mathbb{P}}\right)$. Si de plus $C(f,Z)$ est localement intégrable alors F est une martingale locale.*

Conditionnellement à $\mathcal{F}$, le processus F est une martingale de carré intégrable dont les accroissements sont indépendants. Son crochet prévisible par rapport à la filtration $(\mathcal{F}\vee\widetilde{\mathcal{F}_t})$ est le processus $C(g,Z)$ qui vérifie $C(g,Z)_t=\mathbb{E}\{C(f,Z)_t|\mathcal{F}\}$ pour tout t. Sa loi conditionnelle est complètement caractérisée par les processus X, Z et σ et ne dépend pas du choix de la suite (T_n).

Ce lemme est également une généralisation du lemme 5.10 de [8], et se démontre de façon similaire.

3.4 Preuves

3.4.1 Preuve des théorèmes du type loi des grands nombres

On va commencer par énoncer deux lemmes qui seront très utiles dans la suite. Le premier est une adaptation à nos besoins du théorème d'Itô et de son extension par Jacod-Jakubowski-Mémin (Théorème 3.1 de [11]). Afin de simplifier la rédaction du premier lemme, on énonce quelques hypothèses et notations préliminaires sur la fonction $f:\ \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Définition 3.4.1 *On dira que f est C^2 en x si pour tout $(\omega, s) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ la fonction $x \to f(\omega, s, x)$ est C^2.*

Pour tout $\mathbf{r} \in]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$, on introduit hypothèse suivante :

Hypothèse $(L_1(r))$ Pour tout $(\omega, s) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$, l'application $x \to f(\omega, s, x)$ est dérivable, de plus

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(\omega, s, x_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(\omega, s, x_2)| \ \leq \ \gamma_s(\omega)\ |x_1 - x_2|^r \tag{3.4.1}$$

pour un certain procesus γ à valeurs finies . □

Pour $\mathbf{p} \in]\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, on a :

Hypothèse $(L_2(p))$ Il existe un processus γ à valeurs finies tel que : $\forall(\omega, s, x_1, x_2) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$, la fonction f vérifie :

$$|f(\omega, s, x_1) - f(\omega, s, x_2)| \leq \gamma_s(\omega)|x_1 - x_2|^p. \tag{3.4.2}$$

□

Rappelons que si X est une semimartingale de mesure de sauts μ et si ν est la mesure compensatrice de μ, on a noté I l'ensemble des réels $r \geq 0$ tels que pour tout t, on ait $\int\int_{[0,t]\times\mathbb{R}}(|x|^r \wedge 1) \star \nu(ds, dx) < \infty$.

Si la semimartingale X a pour caracteristiques (B, C, ν) par rapport à la fonction de troncation h et si $1 \in I$, on pose $\bar{B} := B - h \star \nu$.

La formule d'Itô classique est valable pour une semimartingale X et une fonction f, de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ici on dispose d'une fonction $f:\ \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on fixe (ω, u) et pour $t > u$, on veut une formule d'Itô pour $f(\omega, u, X_t(\omega))$. On a à ce propos le lemme suivant :

Lemme 3.4.2 *Soit X une semimartingale et f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, optionnelle .*

a. *Si f est C^2 en x alors, pour tout u, p.s. pour tout ω et pour tout $t \geq u$, on a :*

$$f(u, X_t) \ = \ f(u, X_u) + \int_{u+}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{s-})\, dX_s$$

$$+\frac{1}{2}\int_{u+}^{t}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,X_{s-})\,d\langle X^c,X^c\rangle_s$$

$$+\sum_{u<s\le t}\left[\left(f(u,X_s)-f(u,X_{s-})-\Delta X_s\frac{\partial f}{\partial x}(u,X_{s-})\right)\right]. \quad (3.4.3)$$

b. *Supposons que $X^c=0$ et que $1+r\in I$ pour un $r\in]0,1[$. Si f vérifie $(L_1(r))$ alors pour tout u, p.s. pour tout ω et pour tout $t\ge u$, on a :*

$$f(u,X_t) \;=\; f(u,X_u)\;+\int_{u+}^{t}\frac{\partial f}{\partial x}(u,X_{s-})\;dX_s$$

$$+\sum_{u<s\le t}\left[\left(f(u,X_s)-f(u,X_{s-})-\Delta X_s\frac{\partial f}{\partial x}(u,X_{s-})\right)\right]. \quad (3.4.4)$$

c. *Supposons que $1\in I$, que $X^c=\overline{B}=0$ et que $p\in[0,1]\cap I$. Quand $p>0$, on suppose que f vérifie $(L_2(p))$. Alors pour tout u, p.s. pour tout ω et pour tout $t\ge u$, on a :*

$$f(u,X_t)\;=f(u,X_u)\;+\sum_{u<s\le t}\left[f(u,X_s)-f(u,X_{s-})\right]. \quad (3.4.5)$$

Avant de donner une démonstration de ce lemme, énonçons un corollaire triviale de la partie (c). Rappelons que si $1\in I$, X s'écrit :

$$X_t \;=\; \overline{B}_t \;+\; \sum_{s\le t}\Delta\, X_s.$$

On pose alors

$$\widehat{X}_t \;=\; X_t \;-\; \overline{B}_t \;=\; \sum_{s\le t}\Delta\, X_s.$$

Corollaire 3.4.3 *Supposons que $1\in I$ et que $X^c=0$ et soit $f:\ \Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, une application optionnelle, dérivable en x et telle que $\frac{\partial f}{\partial x}(\omega,s,x)\equiv\frac{\partial f}{\partial x}(\omega,s)$ (ne dépend pas de x).*

Alors pour tout u, p.s. pour tout ω et pour tout $t\ge u$, on a :

$$f(u,X_t)\;=f(u,\widehat{X}_u)\;+\;\frac{\partial f}{\partial x}(\omega,u)\overline{B}_t\;+\;\sum_{u<s\le t}\left[f(u,\widehat{X}_s)-f(u,\widehat{X}_{s-})\right]. \quad (3.4.6)$$

Preuve du Lemme 3.4.2

La partie (c) du lemme est presque évidente car les hypothèses impliquent que $X_t=X_0+\sum_{s\le t}\Delta X_s$. On se limitera donc à démontrer les parties (a) et (b). Fixons $t>0$. On suppose que $u<t$ (si $u=t$ le lemme est vide). Pour chaque n, on définit une subdivision

$\pi^n = \{u = t_0, t_1, \cdots, t_k = t\}$ et où $k = k(n)$ et $t_i = t_i(n)$ telle que $u = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = t$ et $\sup_i |t_{i+1} - t_i| \ \to 0$ quand $n \to \infty$. On a

$$f(u, X_t) - f(u, X_u) = \sum_{i=0}^{k-1} \left[f(u, X_{t_{i+1}}) - f(u, X_{t_i}) \right].$$

Soit $\varepsilon > 0$, et T_p les temps de sauts de X tels que $|\Delta X_s| > \varepsilon$. On note alors $A^n(\varepsilon)$ l'ensemble des $i \leq k-1$ tels qu'il existe un p avec $t_i < T_p \leq t_{i+1}$.

Pour la suite, par la notation $i \notin A^n(\varepsilon)$ on entend $i \in \{0, \cdots, k-1\} \setminus A^n(\varepsilon)$. D'après ce qui précède, on a

$$f(u, X_t) = f(u, X_u) + \sum_{i \in A^n(\varepsilon)} \left[f(u, X_{t_{i+1}}) - f(u, X_{t_i}) \right] + \sum_{i \notin A^n(\varepsilon)} \left[f(u, X_{t_{i+1}}) - f(u, X_{t_i}) \right]. \tag{3.4.7}$$

Remarquons que pour chaque ω fixé, vu que f est toujours continue en x et que le nombre de points de $A^n(\varepsilon)$ est fini et ne dépend pas de n, on a quand $n \to \infty$,

$$\sum_{i \in A^n(\varepsilon)} \left[f(u, X_{t_{i+1}}) - f(u, X_{t_i}) \right] \ \to \ \sum_{p:\ T_p \leq t} \left[f(u, X_{T_p}) - f(u, X_{T_p-}) \right]. \tag{3.4.8}$$

Preuve de la partie (b) : Rappelons (3.4.7) et (3.4.8). En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, on a :

$$\left[f(u, X_{t_{i+1}}) - f(u, X_{t_i}) \right] = (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \frac{\partial f}{\partial x}(u, \bar{X}_i),$$

où $\bar{X}_i$ est entre X_{t_i} et $X_{t_{i+1}}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{i \notin A^n(\varepsilon)} \left[f(u, X_{t_{i+1}}) - f(u, X_{t_i}) \right] \quad &= \quad \sum_{i \in \{0, \cdots, k-1\}} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{t_i}) \ - \\ \sum_{i \in A^n(\varepsilon)} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{t_i}) \quad &+ \quad \sum_{i \notin A^n(\varepsilon)} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(u, \bar{X}_i) - \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{t_i}) \right). \end{aligned}$$

Posons

$$Y_t(\varepsilon) \ = \ X_t \ - \sum_{p:\ T_p \leq t} \Delta X_{T_p},$$

il est facile de voir, vu les hypothèses sur $\frac{\partial f}{\partial x}$, que :

$$\left| \sum_{\{i \notin A^n(\varepsilon)\}} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(u, \bar{X}_i) - \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{t_i}) \right) \right| \ \leq \ \gamma_u \sum_{i \in \{0, \cdots, k-1\}} |Y_{t_{i+1}}(\varepsilon) - Y_{t_i}(\varepsilon)|^{1+r}.$$

Par ailleurs, d'après le théorème 2 de [14],

$$\sum_{i \in \{0, \cdots, k-1\}} |Y_{t_{i+1}}(\varepsilon) - Y_{t_i}(\varepsilon)|^{1+r} \ \to \ S(\varepsilon)_t := \sum_{s \leq t} |\Delta Y_s(\varepsilon)|^{1+r}$$

en probabilité quand $n \to \infty$ ($S(\varepsilon)_t$ est fini car $1 + r \in I$). De plus par le théorème de Lebesgue,

$$S(\varepsilon)_t \to 0, \quad \text{quand } \ \varepsilon \to 0 \ \text{ p.s.}$$

Ensuite (d'après le théorème 21 chapitre II de [18]), on a :

$$\sum_{i\in\{0,\cdots,k-1\}} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{t_i}) \ \to \ \int_{u+}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{s-})dX_s, \tag{3.4.9}$$

quand $n \to \infty$. On a clairement que

$$\sum_{i\in A^n(\varepsilon)} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{t_i}) \ \to \ \sum_{p:\ u<T_p\leq t} \Delta X_{T_p}\frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{T_p-}). \tag{3.4.10}$$

Rappelons (3.4.8) et soulignons que $T_p = T_p(\varepsilon)$ (T_p dépend de ε). Vu que f vérifie ($L_1(r)$), on a

$$\left| f(u, X_s) - f(u, X_{s-}) - \Delta X_s \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{s-}) \right| \ \leq \ \gamma_u |\Delta X_s|^{1+r}$$

et comme $1 + r \ \in I$, cette dernière quantité est finie. Il suit par le théorème de Lebesgue que

$$\sum_{p:\ u<T_p\leq t} \left[f(u, X_{T_p(\varepsilon)}) - f(u, X_{T_p(\varepsilon)-}) \ - \ \Delta X_{T_p(\varepsilon)}\frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{T_p(\varepsilon)-}) \right]$$

converge vers

$$S'_t := \sum_{u<s\leq t} \left(f(u, X_s) - f(u, X_{s-}) - \Delta X_s \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{s-}) \right)$$

quand ε tend vers 0.

D'après tout ce qui précéde, on a bien (3.4.4) ainsi que la partie (b) du lemme.

Preuve de la partie (a) : L'idée de la preuve est classique et reste la même que dans la partie (b) sauf qu'ici, on va d'abord supposer que X est bornée. Revenons à (3.4.7) et (3.4.8). En utilisant la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i\notin A^n(\varepsilon)} \left[f(u, X_{t_{i+1}}) - f(u, X_{t_i}) \right] \ &= \ \sum_{i\in\{0,\cdots,k-1\}} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{t_i}) \\
+ \frac{1}{2} \sum_{i\in\{0,\cdots,k-1\}} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, X_{t_i}) \ &- \ \sum_{i\in A^n(\varepsilon)} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{t_i}) \\
- \frac{1}{2} \sum_{i\in A^n(\varepsilon)} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, X_{t_i}) \ &+ \ \sum_{i\notin A^n(\varepsilon)} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 R(u, X_{t_i}, X_{t_{i+1}})
\end{aligned}$$

où R est le reste de Taylor. Pour ω et u fixé, il existe une fonction $r(\omega, u, .)$ de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, positive, croissante et telle que $\lim_{x\downarrow 0} r(\omega, u, x) = 0$ et $|R(\omega, u, x, y)| \leq$

$r(\omega, u, |x-y|)$, pour tout $x,\ y$ tel que $|x|,\ |y| \le K$, où K est une constante assez grande fixée. Il suit que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_n \ |\sum_{i\notin A^n(\varepsilon)} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 R(u, X_{t_i}, X_{t_{i+1}})| \ \le \ \lim_{\varepsilon\to 0} \ r(u,\varepsilon)[X,X]_t \ = 0.$$

D'après le théorème 30 du chapitre II de [18], on a

$$\frac{1}{2} \sum_{i\in\{0,\cdots,k-1\}} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, X_{t_i}) \ \to \ \frac{1}{2}\int_{u+}^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, X_{s-}) d[X,X]_s,$$

en probabilité quand $n\to\infty$. Comme pour (3.4.10), on a

$$\frac{1}{2} \sum_{i\in A^n(\varepsilon)} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, X_{t_i}) \ \to \ \frac{1}{2} \sum_{p:\ u<T_p\le t} \big(\Delta X_{T_p}\big)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, X_{T_p -}).$$

Considérons le processus

$$\sum_{p:\ u<T_p\le t} \left[f(u, X_{T_p}) - f(u, X_{T_p -}) - \Delta X_{T_p} \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{T_p -}) \right] - \sum_{p:\ u<T_p\le t} \left[\big(\Delta X_{T_p}\big)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, X_{T_p -}) \right],$$

On montre que quand ε tend vers 0, ce dernier tend vers

$$\sum_{u<s\le t} \left[f(u, X_s) - f(u, X_{s-}) - \Delta X_s \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{s-}) \right] - \sum_{u<s\le t} \left[(\Delta X_s)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, X_{s-}) \right].$$

D'après tout ce qui précède, on a bien

$$\begin{aligned} f(u, X_t) \ &= \ f(u, X_u) \ + \ \int_{u+}^t \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{s-})\, dX_s \ + \ \frac{1}{2}\int_{u+}^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, X_{s-})\, d\langle X^c, X^c\rangle_s \ + \\ & \sum_{u<s\le t} \left[\left(f(u, X_s) - f(u, X_{s-}) - \Delta X_s \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{s-}) \right) \right]. \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Supposons que X soit non uniformément borné. Soit $M>0$, on pose $S(M) = \inf\{s,\ |X_s| \ge M\}$. La relation (3.4.11) est vraie pour la semimartingale $X 1_{[0,S(M)[}$. Si on fait tendre M vers l'infini, $S(M)\to\infty$ d'où le résultat pour X.

Lemme 3.4.4 *Soit X une semimartigale et g une application de $\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(\omega,s,x) = 0$ si $x\in[-\varepsilon,+\varepsilon]$, pour un certain $\varepsilon > 0$. Si en plus, g vérifie l'hypothèse $(K[\mathbb{R}])$ alors les processus*

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} g((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n X) \ - \sum_{s\le[t/\Delta_n]\Delta_n} g(s-, \Delta X_s).$$

convergent en variation vers 0 quand $n\to\infty$.

Preuve

Soit g une fonction vérifiant les hypothèses de l'énoncé avec un $\varepsilon > 0$. On notera par (T_p) la suite des temps de sauts successifs tels que $|\Delta X_s| > \frac{\varepsilon}{2}$. Si $T_p < \infty$, on note i_n^p l'entier tel que $T_p \in](i_n^p - 1)\Delta_n, i_n^p \Delta_n]$ et par $B_n(\varepsilon, t)$ l'ensemble des entiers i tels que $1 \leq i \leq [t/\Delta_n]$ et i différent des i_n^p pour tout p. On a alors pour n assez grand

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} g((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n X) &= \sum_{p:\ T_p \leq [t/\Delta_n]\Delta_n} g((i_n^p - 1)\Delta_n, \Delta_{i_n^p}^n X) + \sum_{i \in B_n(\varepsilon,t)} g((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n X) \\ &= \sum_{p:\ T_p \leq [t/\Delta_n]\Delta_n} g((i_n^p - 1)\Delta_n, \Delta_{i_n^p}^n R + \Delta X_{T_p}) + \sum_{i \in B_n(\varepsilon,t)} g((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n R)\end{aligned}$$

où $R_t := X_t - \sum_{p:\ T_p \leq t} \Delta X_{T_p}$. Il n'est pas difficile de voir que

$$\limsup_n \sup_{0<s\leq t} |R_s - R_{s-\Delta_n}| \leq \sup_{s \leq t} |\Delta R_s| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après ce qui précède et vu les propriétés de g, on remarque que :
- $g(s-, \Delta X_s) = g(s, \Delta X_s) = 0$ si $s \neq T_p$ pour tout p
- pour n assez grand, on a pour tout i appartenant à $B^n(\varepsilon, t)$: $g((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n R) = 0$
- quand $n \to \infty$, $\Delta_{i_n^p}^n R$ tend vers 0.

Si on note par $\mathcal{V}(X)$ la variation du processus X , on a donc (pour n assez grand)

$$\begin{aligned}&\mathcal{V}\left(\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} g((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n X) - \sum_{s \leq [t/\Delta_n]\Delta_n} g(s-, \Delta X_s)\right) \\ \leq &\sum_{p:\ T_p \leq [t/\Delta_n]\Delta_n} |g((i_p^n - 1)\Delta_n, \Delta_{i_p^n}^n R + \Delta X_{T_p}) - g(T_p-, \Delta X_{T_p})| \ .\end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 quand $n \to \infty$ d'où le lemme.

Preuve du théorème 3.1.4

Soit f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, optionnelle et vérifiant les hypothèses du théorème. Définissons la suite de processus

$$W^n(f) := \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n X) - D^1(f)_{[t/\Delta_n]\Delta_n} \tag{3.4.12}$$

et pour $\psi :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ telle que $1_{[-1,1]}(x) \leq \psi(x) \leq 1_{[-2,2]}(x)$, On définit également :

$$\psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi(\frac{x}{\varepsilon}) & \text{si } \varepsilon < \infty \\ 1 & \text{si } \varepsilon = \infty. \end{cases} \tag{3.4.13}$$

Remarquons à présent que $f(1-\psi_\varepsilon)(\omega, s, x) = 0$ si $|x| < \varepsilon$ et donc d'après le Lemme 3.4.4,

$$W^n(f(1-\psi_\varepsilon)) \longrightarrow 0$$

en variation quand $n \to 0$. On va maintenant montrer que

$$W^n(f\psi_\varepsilon) \longrightarrow^{u.c.p.} 0 \quad \text{quand } n \to \infty. \tag{3.4.14}$$

Fixons un ε suffisamment petit tel que $[-2\varepsilon, 2\varepsilon] \subset V_0$. L'application $x \to f\psi_\varepsilon(\omega, s, x)$ est donc C^2 sur $\mathbb{R}$. On définit :

$$\left.\begin{array}{lllllll} Y_0^n & = & 0 & \text{et} \quad Y_s^n & = & X_s - X_{(i-1)\Delta_n} & \text{si} \quad s \in](i-1)\Delta_n, i\Delta_n] \\ \phi^n(0) & = & 0 & \text{et} \quad \phi^n(s) & = & (i-1)\Delta_n & \text{si} \quad s \in](i-1)\Delta_n, i\Delta_n] \\ f_\varepsilon & = & f\psi_\varepsilon. & & & & \end{array}\right\}$$

D'après le Lemme 3.3.1, on a :

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f_\varepsilon((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n X) = \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(\phi^n(s), Y_{s-}^n)\, dB_s + \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(\phi^n(s), Y_{s-}^n)\, dX_s^c$$

$$+ \left[\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(\phi^n(s), Y_{s-}^n)h(x)\right] \star (\mu - \nu)_{[t/\Delta_n]\Delta_n} + \frac{1}{2}\int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x^2}(\phi^n(s), Y_{s-}^n) d\langle X^c, X^c\rangle_s$$

$$+ \sum_{0<s\leq[t/\Delta_n]\Delta_n} \left[f_\varepsilon(\phi^n(s), Y_s^n) - f_\varepsilon(\phi^n(s), Y_{s-}^n) - h(\Delta X_s)\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(\phi^n(s), Y_{s-}^n) \right].$$

Pour chaque s fixé,

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(\phi^n(s), Y_{s-}^n) \longrightarrow \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(s-, 0),$$

de plus $|\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}|$ est majoré par un processus Γ localement borné. Il suit par la partie (iii) du théorème 4.31 du chapitre I de [10] que quand $n \to \infty$, on a

$$\left.\begin{array}{lll} \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \left(\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(\phi^n(s), Y_{s-}^n) - \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(s-, 0)\right)\, dB_s & \longrightarrow^{u.c.p.} & 0, \\ \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \left(\frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x^2}(\phi^n(s), Y_{s-}^n) - \frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x^2}(s-, 0)\right)\, d\langle X^c, X^c\rangle_s & \longrightarrow^{u.c.p.} & 0. \end{array}\right\} \tag{3.4.15}$$

De même il n'est pas difficile de voir que

$$\sum_{0<s\leq[t/\Delta_n]\Delta_n} \left[\left(f_\varepsilon(\phi^n(s), Y_s^n) - f_\varepsilon(\phi^n(s), Y_{s-}^n) - h(\Delta X_s)\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(\phi^n(s), Y_{s-}^n) \right)\right.$$

$$\left. - \left(f_\varepsilon(s-, \Delta X_s) - h(\Delta X_s)\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(s-, 0) \right) \right] \longrightarrow^{u.c.p.} 0 \tag{3.4.16}$$

et par l'inégalité de Doob, on voit que quand $n \to \infty$,

$$\left.\begin{array}{lll} \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \left(\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(\phi^n(s), Y_{s-}^n) - \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(s-, 0) \right)\, dX_s^c & \longrightarrow^{u.c.p} & 0, \\ \left[\left(\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(\phi^n(s), Y_{s-}^n) - \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(s-, 0) \right)\, h(x) \right] \star (\mu - \nu)_{[t/\Delta_n]\Delta_n} & \longrightarrow^{u.c.p} & 0. \end{array}\right\} \tag{3.4.17}$$

D'après (3.4.15), (3.4.16) et (3.4.17), on a bien (3.4.14).

Remarquons que $W^n(f)$ ne dépend pas de ε et

$$W^n(f(1-\psi_\varepsilon)) \ + \ W^n(f_\varepsilon) \ = \ W^n(f).$$

Il en suit que

$$W^n(f) \longrightarrow^{u.c.p.} 0$$

quand $n \to \infty$.
A ce stade, on a montré que le processus

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f((i-1)\Delta_n, \Delta_i^n X) \ - \ D^1(f)_{[t/\Delta_n]\Delta_n} \quad \text{converge u.c.p. vers 0.}$$

Pour finir la preuve du théorème, il suffit de remarquer que le processus $\big(D^1(f)_{[t/\Delta_n]\Delta_n}\big)$ converge vers $\big(D^1(f)_t\big)$ pour la topologie de Skorokhod.

Preuve des Théorèmes 3.1.5, 3.1.6 et 3.1.9

La preuve du théorème 3.1.5 est similaire à celle du théorème (3.1.4) sauf qu'il faudra utiliser la partie **b.** du lemme 3.4.2 à la place de la partie **a.** La preuve du théorème 3.1.6 est, quant à elle, évidente (on peut aussi le voir en utilisant la partie **c** du lemme 3.4.2 et le corollaire 3.4.3).

Pour la preuve du théorème 3.1.9, le schéma au début et le même que pour le théorème 3.1.4 : on utilise le lemme 3.4.4 et à la place du lemme 3.4.2, on applique les résultats du théorème 4 de [14].

3.4.2 Preuve du théorème 3.2.1

Préliminaires

Pour la preuve, on a besoin que les caractéristiques de X soient bornées de même que les dérivées en x de f. A cet effet, on renforce l'hypothèse (H_1) de la la manière suivante :

Hypothèse LH_1 **:** On suppose que (H_1) est vérifiée et les processus X, b et σ sont bornés par une constante. De plus les fonctions $\gamma_k = \gamma$ ne dépendent pas de k et γ est une fonction bornée. $\square$

De même, le processus Γ qui intervient dans le théorème 3.2.1 est borné.

Ces hypothèses de bornitude seront levées plus tard grâce à une procédure de "délocalisation".

Nous appellerons fréquemment les constantes par K, celui-ci pouvant changer d'une ligne à une autre.

Il est clair que sous (LH_1), on a $\int_{\mathbb{R}} \gamma(x)^2 F(dx) \ < \ \infty$. On suppose pour le moment que (LH_1) est vérifiée. Rappelons la suite de fonctions (ϕ_n) définie par : $\phi^n(s) = (i-1)\Delta_n$ pour $s \in](i-1)\Delta_n, i\Delta_n]$.

Sous (LH_1), X s'écrit

$$X_t = X_0 + \int_0^t b'_s ds + \int_0^t \sigma_{s-} dW_s + \delta \star (\underline{\mu} - \underline{\nu})_t,$$

où $b'_t = b_t + \int_{\mathbb{R}} h'(\delta(t,x))F(dx)$ et $h'(x) = h(x) - x$. Pour $\varepsilon > 0$, on rappelle ψ_ε définie dans (3.4.13) et on définit

$$E = \{ \ x \in \mathbb{R}, \ \gamma(x) \ > \ \varepsilon \ \} \quad \text{et} \quad N_t = 1_E \star \underline{\mu}_t. \tag{3.4.18}$$

Soit $T'_1, \cdots, T'_p, \cdots$ les temps de saut successifs de N. Commençons par énoncer deux lemmes dont le premier est un résultat de Jacod-Protter (voir lemme 5.6 de [12]) et dont le second est dû à Jacod (voir lemme 5.9 de [8]).

Lemme 3.4.5 *Soit X une semimartingale vérifiant (LH_1). Pour chaque T'_p, on définit l'entier i^n_p par $(i^n_p - 1)\Delta_n < T'_p \leq i^n_p \Delta_n$. Alors*

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \Big(\sigma_{(i^n_p-1)\Delta_n} (W_{T'_p} - W_{(i^n_p-1)\Delta_n}) \ ; \ \sigma_{T'_p} (W_{i^n_p \Delta_n} - W_{T'_p}) \Big)_{p \geq 1}$$

converge stablement en loi vers

$$\Big(\sigma_{T'_{p-}} U_p \sqrt{\kappa_p} \ ; \ \sigma_{T'_p} U'_p \sqrt{1 - \kappa_p} \Big)_{p \geq 1}$$

Lemme 3.4.6 *Sous les hypothèses du lemme 3.4.5,*

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \Big(X_{i^n_p \Delta_n} \ - \ X_{(i^n_p-1)\Delta_n} \ - \ \Delta X_{T'_p} \ - \ \sigma_{(i^n_p-1)\Delta_n} (W_{T'_p} - W_{(i^n_p-1)\Delta_n}) \ - \ \sigma_{T'_p} (W_{i^n_p \Delta_n} - W_{T'_p}) \Big)$$

converge en probabilité vers 0.

Preuve du théorème 3.2.1 sous (LH_1)

Posons

$$Z^n(f) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \left[\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f\left((i-1)\Delta_n, \Delta^n_i X\right) \ - \sum_{s \leq [t/\Delta_n]\Delta_n} f\left(\phi^n_s, \Delta X_s\right) \right].$$

Nous prouvons d'abord la partie A. du Théorème 3.2.1, preuve que nous subdivisons en plusieures étapes.

Première Etape : Notons d'abord que si s ne coïncide pas avec un des temps d'arrêt T'_p, on a $|\Delta X_s| < \varepsilon$. D'après la définition de ψ_ε (voir (3.4.13)), on a

$$1_{]-\infty,-4\varepsilon[\cup]4\varepsilon,+\infty[}(x) \ \leq \ 1 - \psi_{2\varepsilon}(x) \ \leq \ 1_{]-\infty,-2\varepsilon[\cup]2\varepsilon,+\infty[}(x)$$

Pour n assez grand, on a donc (comme dans la preuve du lemme 3.4.4)

$$Z^n\left(f(1-\psi_{2\varepsilon})\right)_t = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \sum_{p: T'_p \leq [t/\Delta_n]\Delta_n} \Big[f(1-\psi_{2\varepsilon}) \Big(\phi^n_{T'_p}, \Delta X_{T'_p} + \Delta^n_{i^n_p} X(\varepsilon)\Big) \ - \ f(1-\psi_{2\varepsilon}) \Big(\phi^n_{T'_p}, \Delta X_{T'_p}\Big) \Big]$$

Avec

$$X(\varepsilon)_t = X_t - \sum_{p:T'_p \le t} \Delta X_{T'_p}.$$

En utilisant la formule de Taylor, il existe $\bar{X}^n_{i^n_p}(\varepsilon)$ entre $\Delta X_{T'_p}$ et $\Delta X_{T'_p} + \Delta^n_{i^n_p} X(\varepsilon)$ tel que

$$Z^n\left(f(1-\psi_{2\varepsilon})\right)_t \;=\; \sum_{p:\ T'_p \le [t/\Delta_n]\Delta_n} \frac{\Delta^n_{i^n_p} X(\varepsilon)}{\sqrt{\Delta_n}} \frac{\partial f(1-\psi_{2\varepsilon})}{\partial x} \left(\phi^n_{T'_p}, \bar{X}^n_{i^n_p}(\varepsilon)\right). \tag{3.4.19}$$

On déduit des lemmes 3.4.6 et 3.4.5 que les processus $Z^n\left(f(1-\psi_{2\varepsilon})\right)$ converge stablement en loi vers le processus

$$\sum_{p:T'_p \le t} \frac{\partial f(1-\psi_{2\varepsilon})}{\partial x} \left(T'_p-, \Delta X_{T'_p}\right) \left(\sqrt{\kappa_p} U_p \sigma_{T'_p-} \;+\; \sqrt{1-\kappa_p} U'_p \sigma_{T'_p}\right).$$

Remarquons (vu que la fonction $\frac{\partial f(1-\psi_{2\varepsilon})}{\partial x}(s,x) = 0$ si $|x| \le \varepsilon$) que cette dernière quantité est égale en loi conditionnnelle par rapport à $\mathcal{F}$ à

$$Z\left(\frac{\partial f(1-\psi_{2\varepsilon})}{\partial x}\right) \;=\; \sum_{p:\ T_p \le t} \frac{\partial\ f(1-\psi_{2\varepsilon})}{\partial x} \left(T_p-, \Delta X_{T_p}\right) \left(\sqrt{\kappa_p} U_p \sigma_{T_p-} \;+\; \sqrt{1-\kappa_p} U'_p \sigma_{T_p}\right),$$

donc,

$$Z^n\left(f(1-\psi_{2\varepsilon})\right) \text{ converge en loi stable vers } Z\left(\frac{\partial f(1-\psi_{2\varepsilon})}{\partial x}\right).$$

Deuxième Etape : Considérons la fonction $f\psi_{2\varepsilon}$. D'après nos hypothèses, $\left[\frac{\partial(f\psi_{2\varepsilon})}{\partial x}\right]^2 \star \mu_t \;<\; \infty$, il suit alors d'après le Lemme 3.2.2 que $Z\left(\frac{\partial(f\psi_{2\varepsilon})}{\partial x}\right)$ est bien définie. Par ailleurs, on montre par le théorème de Lebesgue que $C\left(f\psi_{2\varepsilon}\right) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$ pour chaque ω fixé (on utilise pour cela la dérivabilité et les propriétés de f à l'origine ainsi que la définition 3.4.13). De plus, $C\left(f\psi_{2\varepsilon}\right)$ est majoré par un certain processus A tel que $\mathbb{E}(A_t) < \infty,\ \forall t$.

En utilisant l'inégalité de Doob, puis en appliquant le lemme 3.2.2 (en particulier (3.2.5)) à $D^2\left(f\psi_{2\varepsilon}\right) = Z\left(\frac{\partial(f\psi_{2\varepsilon})}{\partial x}\right)$ et enfin en faisant usage du théorème de Lebesgue, on obtient que $Z\left(\frac{\partial(f\psi_{2\varepsilon})}{\partial x}\right)$ converge u.c.p. vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.

Il suit par linéarité de l'opérateur Z que $Z\left(\frac{\partial\ f(1-\psi_{2\varepsilon})}{\partial x}\right)$ converge u.c.p. vers $Z(\frac{\partial f}{\partial x})$ quand $\varepsilon \to 0$.

Troisième Etape : Dans cette étape, nous allons montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_n \mathbb{P}\left\{ \sup_{s \le t} \left| \frac{Z^n(f\psi_{2\varepsilon})}{\sqrt{\Delta_n}} \right| \;>\; \eta \right\} \;=\; 0 \quad \forall\, \eta,\ t \;>\; 0. \tag{3.4.20}$$

Posons $Y^n_s = X_s - X_{(i-1)\Delta_n}$ si $s \in\ ((i-1)\Delta_n, i\Delta_n]$. Il est facile de voir en appliquant la formule d'Itô du lemme 3.4.2 que

$$\left.\begin{array}{rcl} Z^n(f\psi_{2\varepsilon}) & = & \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\Big[\int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n}\frac{\partial(f\psi_{2\varepsilon})}{\partial x}\left(\phi^n(s),Y^n_{s-}\right)b'_s\,ds \\ & & +\ \frac{1}{2}\int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n}\sigma^2_{s-}\frac{\partial^2(f\psi_{2\varepsilon})}{\partial x^2}\left(\phi^n(s),Y^n_{s-}\right)\,ds \\ & & +\ \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n}\frac{\partial(f\psi_{2\varepsilon})}{\partial x}\left(\phi^n(s),Y^n_{s-}\right)\sigma_{s-}\,dW_s \\ & & +\ \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial(f\psi_{2\varepsilon})}{\partial x}\left(\phi^n(s),Y^n_{s-}\right)\delta(s,x)\right)(\underline{\mu}-\underline{\nu})(ds,dx) \\ & & +\ \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n}\int_{\mathbb{R}}\Big(f\psi_{2\varepsilon}\left(\phi^n(s),Y^n_{s-}+\delta(s,x)\right)\ -\ f\psi_{2\varepsilon}\left(\phi^n(s),\delta(s,x)\right) \\ & & -\ f\psi_{2\varepsilon}\left(\phi^n(s),Y^n_{s-}\right)\ -\ \delta(s,x)\frac{\partial(f\psi_{2\varepsilon})}{\partial x}\left(\phi^n(s),Y^n_{s-}\right)\Big)\underline{\mu}(ds,dx)\Big]. \end{array}\right\} \tag{3.4.21}$$

Nous traitons les termes de (3.4.21) un par un. Notons pour commencer que sous les hypothèses de bornitude faites au début de cette sous-section, on a

$$\left.\begin{array}{rcll} \mathbb{E}\{|X_t-X_s|^q\} & \le & K|t-s|^{q/2}, & \forall\ q\ge 2. \\ \left|\frac{\partial^j(f\psi_{2\varepsilon})}{\partial x^j}(s,x)\right| & \le & \alpha_\varepsilon\left[|x|\wedge(4\varepsilon)\right]^{3-j}, & \end{array}\right\} \tag{3.4.22}$$

où $j=0,1,2$ et $\frac{\partial^0(f\psi_{2\varepsilon})}{\partial x^0}=f\psi_{2\varepsilon}$, α_ε tend vers 0 quand $\varepsilon\to 0$ et K est une constante assez grand.

D'après ce qui précéde ,

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t\le T}\left|\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n}\frac{\partial(f\psi_2\varepsilon)}{\partial x}\left(\phi^n(s),Y^n_{s-}\right)b'_s ds\right|\ >\ \eta\right\}\ \le$$

$$\frac{K}{\eta\sqrt{\Delta_n}}\int_0^T\mathbb{E}(Y^{n\ 2}_{s-})\alpha_\varepsilon ds\ \le\ \frac{KT\sqrt{\Delta_n}\alpha_\varepsilon}{\eta}\ \to\ 0 \text{ quand } n\to\infty \tag{3.4.23}$$

De la même manière

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \limsup_n\ \mathbb{P}\left\{\sup_{t\le T}\left|\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n}\frac{\partial^2(f\psi_2\varepsilon)}{\partial x^2}\left(\phi^n(s),Y^n_{s-}\right)\sigma^2_s ds\right|\ >\eta\right\}\ =\ 0. \tag{3.4.24}$$

Pour chaque n fixé, le processus

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n}\frac{\partial(f\psi_2\varepsilon)}{\partial x}\left(\phi^n(s),Y^n_{s-}\right)\sigma_s dW_s$$

est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{[t/\Delta_n]\Delta_n})$. Il suit par Cauchy-Schwarz et par (3.4.22) que

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t\le T}\left|\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n}\frac{\partial(f\psi_{2\varepsilon})}{\partial x}\left(\phi^n(s),Y^n_{s-}\right)\sigma_s dW_s\right|\ >\eta\right\}$$

$$\le\ \frac{1}{\eta\sqrt{\Delta_n}}\mathbb{E}\left\{\sup_{t\le T}\left|\int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n}\frac{\partial(f\psi_{2\varepsilon})}{\partial x}\left(\phi^n(s),Y^n_{s-}\right)\sigma_s dW_s\right|\right\}$$

$$\leq \frac{1}{\eta\sqrt{\Delta_n}} \left(\int_0^T \mathbb{E}\left\{ \left(\frac{\partial(f\psi_{2\varepsilon})}{\partial x} \left(\phi^n(s), Y^n_{s-}\right) \sigma_s \right)^2 \right\} ds \right)^{1/2} \leq KT^{1/2}\alpha_\varepsilon,$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_n \mathbb{P}\left\{ \sup_{t\leq T} \left| \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \frac{\partial(f\psi_{2\varepsilon})}{\partial x} \left(\phi^n(s), Y^n_{s-}\right) \sigma_s dW_s \right| > \eta \right\} = 0. \quad (3.4.25)$$

De même on montre que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_n \mathbb{P}\left\{ \sup_{t\leq T} \left| \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial(f\psi_{2\varepsilon})}{\partial x} \left(\phi^n(s), Y^n_{s-}\right) \delta(s,x) \right) (\underline{\mu} - \underline{\nu})(ds,dx) \right| > \eta \right\} = 0. \quad (3.4.26)$$

En utilisant la formule de Taylor plusieurs fois et en séparant les cas où $|x| \leq |y|$ et où $|x| \geq |y|$, on montre que : $\forall\ T,\ \ \exists\ M_T > 0$ tel que $\forall\ s \leq t$,

$$\left| f\psi_{2\varepsilon}(s, x+y) - f\psi_{2\varepsilon}(s,x) - f\psi_{2\varepsilon}(s,y) - x\frac{\partial(f\psi_{2\varepsilon})}{\partial x}(s,y) \right| \leq K\alpha_\varepsilon |x|^2|y|. \quad (3.4.27)$$

Il s'en suit que

$$\mathbb{E}\left\{ \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \int_{\mathbb{R}} \left| f\psi_{2\varepsilon}\left(\phi^n(s), Y^n_{s-} + \delta(s,x)\right) - f\psi_{2\varepsilon}\left(\phi^n(s), \delta(s,x)\right) + f\psi_{2\varepsilon}\left(\phi^n(s), Y^n_{s-}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. \delta(s,x)\frac{\partial(f\psi_{2\varepsilon})}{\partial x}\left(\phi^n(s), Y^n_{s-}\right) \right| \underline{\mu}(ds,dx) \right\} \leq K\alpha_\varepsilon \left(\int_0^t \mathbb{E}\left\{ \frac{|Y^n_{s-}|}{\sqrt{\Delta_n}} \right\} ds \right) \leq K\alpha_\varepsilon t^2 \quad (3.4.28)$$

et cette dernière quantité tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$. On vient ainsi de montrer (3.4.20).

En ce qui concerne la partie b du théorème, il suffit de remarquer que

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \sum_{0<s\leq[t/\Delta_n]\Delta_n} |f\left(\phi^n(s), \Delta X_s\right) - f(s-, \Delta X_s)| \leq \Delta_n^{\alpha-\frac{1}{2}} \left(\sup_{s\leq t} |\theta_s| \right) \sum_{s\leq t} \Delta X_s^2$$

et cette dernière quantité tend vers 0 quand $n \to \infty$ puisque $\alpha > 1/2$ ce qui finit la démonstration du Théorème 3.2.1 sous l'hypothèse (LH_1) et celle de bornitude des dérivées de f.

On va à présent montrer la véracité du théorème sous l'hypothèse (H_1) par une procédure classique de "délocalisation". Nous ne faisons ici que reprendre ce qui a été fait dans la section 3 de [3]

"Délocalisation"

Rappelons la suite de temps d'arrêt (T_k) qui intervient dans l'hypothşe (H_1). Il n'est pas restrictif de supposer que $T_k \leq k$ pour tout k. Rappelons également le processus Γ dont on a parlé au début des préliminaires de la preuve et qui intervient dans l'énoncé du théorème.

Soit maintenant (T'_k) la suite de temps d'arrêt définis par

$$T'_k = \inf\{s,\ |X_s| + |b_s| + |\sigma_s| + |\Gamma_s| \geq k\}.$$

Pour tout réel $l > 0$, on définit
$E_{k,l} := \{x \in \mathbb{R},\ \gamma_k(x) > l\}$ et $R_{k,l} := \inf\{s, \underline{\mu}([0,s] \times E_{k,l}) \geq 1\}$. On a

$$\mathbb{P}\{R_{k,l} \leq T_k\} \leq \mathbb{P}\{\underline{\mu}([0,T_k] \times E_{k,l}) \geq 1\} \leq \mathbb{E}\{\underline{\mu}([0,T_k] \times E_{k,l})\} = \mathbb{E}\{\underline{\nu}([0,T_k] \times E_{k,l})\} \leq kF(E_{k,l}).$$

D'après l'hypothèse (H_2), $F(E_{k,1}) < \infty$. Il suit par le théorème de Lebesgue que

$$\lim_{l\to\infty} \mathbb{P}\{R_{k,l} \leq T_k\} = \lim_{l\to\infty} F(E_{k,l}) = 0,$$

on note alors par (l_k) une sous-suite telle que $\mathbb{P}\{R_{k,l_k} \leq T_k\} \leq 2^{-k}$. Soit les temps d'arrêt $S'_k = T_k \wedge T'_k \wedge R_{k,l_k}$, qui croissent clairement vers l'infini. On pose alors

$$\left.\begin{array}{lcl}
\left(b_s^{(k)}, \sigma_s^{(k)}, \delta^{(k)}(s,x)\right) & = & \begin{cases} (b_s, \sigma_s, \delta(s,x)) & \text{si} \quad s < S'_k \\ (0,0,0) & \text{si} \quad s \geq S'_k \end{cases} \\
\underline{\mu}^{(k)}(ds,dx) & = & \underline{\mu}(ds,dx)1_{E^c_{k,l_k}}(x) \\
F^{(k)}(dx) & = & F(dx)1_{E^c_{k,l_k}}(x) \\
\underline{\nu}^{(k)}(ds,dx) & = & \underline{\nu}(ds,dx)1_{E^c_{k,l_k}}(x) \\
\gamma'_k(x) & = & \gamma_k(x)1_{E^c_{k,l_k}}(x).
\end{array}\right\} \qquad (3.4.29)$$

Soit h une fonction de troncation et $h'(x) := x - h(x)$. On définit le processus $X^{(k)}$ associé aux quantités intervenant dans (3.4.29) de la façon suivante

$$\begin{aligned}
X_t^{(k)} &= X_0 + \int_0^t b_s^{(k)}\, ds + \int^{(k)} \sigma_{s-}^{(k)}\, dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(\delta^{(k)}(s,x))(\underline{\mu}^{(k)} - \underline{\nu}^{(k)})(ds,dx) \\
&\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h'(\delta^{(k)}(s,x))\underline{\mu}^{(k)}(ds,dx) \\
&= X_0 + \int_0^t b''^{(k)}_s\, ds + \int^{(k)} \sigma_{s-}^{(k)}\, dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \delta^{(k)}(s,x)(\underline{\mu}^{(k)} - \underline{\nu}^{(k)})(ds,dx)
\end{aligned}$$

où $b''^{(k)}_s := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h'(\delta^{(k)}(s,x))\underline{\nu}^{(k)}(ds,dx)$. Comme $b^{(k)}$, h et $\delta^{(k)}$ sont uniformément bornés, il en est de même de $b'^{(k)}$.
Le processus $X^{(k)}$ vérifie clairement (LH_1) et on remarque que $X_s = X_s^{(k)}$ si $s < S'_k$. Rappelons que

$$Z(f,X)_t = \sum_{p:S_p \leq t} \frac{\partial f}{\partial x}(S_p-, \Delta X_{S_p}) \left(\sqrt{\kappa_p} U_p \sigma_{S_p-} + \sqrt{1-\kappa_p} U'_p \sigma_{S_p}\right)$$

où (S_p) sont des temps d'arrêt qui épuisent les sauts de (X). Posons

$$W^n(f,X)_t := \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \left[\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) - \sum_{0 \leq s \leq [t/\Delta_n]\Delta_n} f(s-, \Delta X_s) \right].$$

Vu la première partie de la preuve, on a que $W^n(f, X^{(k)})$ converge en loi stable vers le processus $Z(f, X^{(k)})$. Or pour $s < S'_k$, $W^n(f, X)_s = W^n(f, X^{(k)})_s$ et $Z(f, X)_s = Z(f, X^{(k)})_s$. On en déduit que le processus $W^n(f, X)$ converge stablement en loi vers $Z(f, X)$ (car la topologie de Skorokod est "locale" en temps). Ce qui finit la preuve du théorème.

3.4.3 Preuve du Théorème 3.3.4

Commmençons par renforcer l'hypothèse (N_1).

Hypothèse LN_1 **:** On suppose que (N_1) est vérifiée, que les processus b', σ' et Z sont bornés et que les fonctions (γ_k) ne dépendent pas de k $(\gamma_k = \gamma)$ et γ est bornée.

Sous $(L - N_1)$, on a

$$\begin{pmatrix} Z_t \\ X_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_0 \\ X_0 \end{pmatrix} + \int_0^t b''_s \, ds + \int_0^t \sigma'_s \, dW'_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \delta'(s,z)(\mu' - \nu')(ds, dx) \quad (3.4.30)$$

où

$$b''_t := b'_t + \int_0^t k'(\delta'(s,z)) \, F(dz). \quad (3.4.31)$$

On pose

$$F^n(g) := \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \left[\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} g\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, \Delta_i^n X\right) \; - \; D^1(g, Z)_{[t/\Delta_n]\Delta_n} \right].$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on rappelle la fonction $\psi_\varepsilon(x)$ définie dans (3.4.13). On pose

$$\left\{ \begin{array}{lcl} g_\varepsilon(z,x) & := & g(z,x)\psi_{2\varepsilon}(x) \\ g'_\varepsilon(z,x) & := & g(z,x)(1 - \psi_{2\varepsilon}(x)) \end{array} \right. , \quad (3.4.32)$$

et $F^n(g) = F_1^n(g, \varepsilon) + F_2^n(g, \varepsilon)$, où

$$F_1^n(g,\varepsilon)_t := \; \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \left[\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} g'_\varepsilon\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, \Delta_i^n X\right) \; - \; D^1\left(g'_\varepsilon, Z\right)_{[t/\Delta_n]\Delta_n} \right] \quad (3.4.33)$$

et

$$F_2^n(g,\varepsilon)_t := \; \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \left[\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} g_\varepsilon\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, \Delta_i^n X\right) \; - \; D^1\left(g_\varepsilon, Z\right)_{[t/\Delta_n]\Delta_n} \right]. \quad (3.4.34)$$

Rappelons également que pour $s \in](i-1)\Delta_n, i\Delta_n]$, on a $\phi^n(s) = (i-1)\Delta_n$ et $Y_s^n =$

$X_{s-} - X_{(i-1)\Delta_n}$. En appliquant la formule d'Itô, on a $F_2^n(g,\varepsilon)_t = \sum_{j=1}^5 W_j^n(\varepsilon)_t$, où

$$\left.\begin{array}{rcl} W_1^n(\varepsilon)_t &=& \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} b''_s \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial x}\left(Z_{\phi^n(s)}, Y_{s-}^n\right) ds, \\ W_2^n(\varepsilon)_t &=& \frac{1}{2\sqrt{\Delta_n}} \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \sigma_s^2 \frac{\partial^2 g_\varepsilon}{\partial x^2}\left(Z_{\phi^n(s)}, Y_{s-}^n\right) ds, \\ W_3^n(\varepsilon)_t &=& \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \sigma_s \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial x}\left(Z_{\phi^n(s)}, Y_{s-}^n\right) dW_s, \\ W_4^n(\varepsilon)_t &=& \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \int_0^{\mathbb{R}} \delta(s,x) \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial x}\left(Z_{\phi^n(s)}, Y_{s-}^n\right) (\underline{\mu} - \underline{\nu})(ds,dx) \\ W_5^n(\varepsilon)_t &=& \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \int_0^{\mathbb{R}} \left[g_\varepsilon\left(Z_{\phi^n(s)}, Y_{s-}^n + \delta(s,x)\right) - g_\varepsilon\left(Z_{\phi^n(s)}, Y_{s-}^n\right)\right. \\ && \left.\delta(s,x)\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial x}\left(Z_{\phi^n(s)}, Y_{s-}^n\right) - g_\varepsilon(Z_{s-}, \delta(s,x))\right] \underline{\mu}(ds,dx). \end{array}\right\} \quad (3.4.35)$$

Nous traiterons ces termes un par un. Remarquons d'abord que

$$W_1^n(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} b''_s Y_{s-}^n \frac{\partial^2 g_\varepsilon}{\partial x^2}\left(Z_{\phi^n(s)}, \bar{Y}_s^n\right) ds.$$

où $\bar{Y}_s^n$ est entre 0 et Y_{s-}^n. Comme on l'avait vu sous (LH_1) pour X, sous (LN_1) on a :

$$\mathbb{E}(|X_t - X_s|^q) + \mathbb{E}(||Z_t - Z_s||^q) \leq K|t-s|^{q/2}, \quad \text{pour } 0 < q \leq 2. \quad (3.4.36)$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \mathbb{E}\left\{\left|\frac{b'_s Y_{s-}^n}{\sqrt{\Delta_n}} \frac{\partial^2 g_\varepsilon}{\partial x^2}\left(Z_{\phi^n(s)}, \bar{Y}_s^n\right)\right|\right\} ds &\leq K \int_0^t \left[\left(\mathbb{E}\left\{\frac{|Y_{s-}^n|^2}{\Delta_n}\right\}\right)^{1/2}\right. \\ &\quad \left.\left(\mathbb{E}\left\{\left(\frac{\partial^2 g_\varepsilon}{\partial x^2}\left(Z_{\phi^n(s)}, \bar{Y}_s^n\right)\right)^2\right\}\right)^{1/2}\right] ds \\ &\leq K \int_0^t \left(\mathbb{E}\left\{\left(\frac{\partial^2 g_\varepsilon}{\partial x^2}\left(Z_{\phi^n(s)}, \bar{Y}_s^n\right)\right)^2\right\}\right)^{1/2} ds, \end{aligned} \quad (3.4.37)$$

Comme par hypothèse $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(z,0) \equiv 0$, on a $\frac{\partial^2 g_\varepsilon}{\partial x^2}(z,0) \equiv 0$ et donc par le théorème de Lebesgue, l'expression (3.4.37) converge vers 0, d'où

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} b'_s Y_{s-}^n \frac{\partial^2 g_\varepsilon}{\partial x^2}\left(Z_{\phi^n(s)}, \bar{Y}_s^n\right) ds \longrightarrow^{u.c.p.} 0. \quad (3.4.38)$$

Il suit que $W_1^n(f)$ converge u.c.p. vers 0 quand $n \to \infty$ et par un raisonnement identique, on montre que $W_2^n(f)$ converge u.c.p. vers 0.

D'autre part, on a

$$W_3^n(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \sigma_s Y_{s-}^n \frac{\partial^2 g_\varepsilon}{\partial x^2}(Z_{\phi^n(s)}, \bar{Y}_s^n)\, dW_s,$$

où $\bar{Y}_s^n$ est entre 0 et Y_{s-}^n.

Il suit pour M assez grand que

$$\mathbb{E}\{W_3^n(\varepsilon)^2\} \leq K \left(\sup_{\{|z|\leq M,\ |x|\leq 4\varepsilon\}} \left(\frac{\partial^2 g_\varepsilon}{\partial x^2}(z,x) \right)^2 \right) \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \mathbb{E}\left\{ \frac{Y_{s-}^{n\ 2}}{\Delta_n} \right\} ds$$

$$\leq K't \left(\sup_{\{|z|\leq M,\ |x|\leq 4\varepsilon\}} \left(\frac{\partial^2 g_\varepsilon}{\partial x^2}(z,x) \right)^2 \right).$$

Cette dernière quantité tend vers 0 quand ε tend vers 0 à cause des hypothèses sur g_ε. On déduit que pour tout $\eta,\ T > 0$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_n \mathbb{P}\left\{ \sup_{t\leq T} |W_3^n(\varepsilon)| > \eta \right\} = 0.$$

De façon similaire, on montre que pour tout $\eta,\ T > 0$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_n \mathbb{P}\left\{ \sup_{t\leq T} |W_4^n(\varepsilon)| > \eta \right\} = 0.$$

Venons-en à l'expression $W_5^n(\varepsilon)$. On démontre que pour tout z_1, z_2 appartenant à un compact fixé de $\mathbb{R}^d$ et pour tout $x,\ y$ appartenant à $\mathbb{R}$, on a

$$\left| g_\varepsilon(z_1, y+x) - g_\varepsilon(z_1, y) - x\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial x}(z_1, y) - g_\varepsilon(z_2, x) \right|$$

$$\leq\ K\alpha_\varepsilon x^2 \left[\sum_{j=1}^d |z_1^j - z_2^j|\ +\ |y| \right]$$

où α_ε est une suite qui tend vers 0 avec ε. Il suit alors que

$$|W_5^n(\varepsilon)_t|\ \leq\ \frac{K}{\sqrt{\Delta_n}}\alpha_\varepsilon \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \int_{\mathbb{R}} \left(|Y_{s-}^n| + |Y_s^n| + \sum_{j=1}^d |Z_{\phi^n(s)}^j - Z_{s-}^i| \right) \delta(s,x)^2\ \underline{\mu}(ds,dx)$$

On a donc

$$\mathbb{E}\{|W_5^n(\varepsilon)|\}\ \leq\ K't\alpha_\varepsilon \mathbb{E}\left\{ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \delta(s,x)^2\ F(dx)ds \right\},$$

cette dernière quantité converge vers 0 quand ε tend vers 0. On a donc : pour tout $\eta,\ T > 0$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_n\ \mathbb{P}\left\{ \sup_{t\leq T} |W_5^n(\varepsilon)|\ >\ \eta \right\}\ =\ 0.$$

Et d'après tout ce qui précède,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_n\ \mathbb{P}\left\{ \sup_{t\leq T} |F_2^n(g,\varepsilon)|\ >\ \eta \right\}\ =\ 0.$$

Nous allons maintenant nous tourner vers le processus $F_1^n(f,\varepsilon)$ défini dans 3.4.33. Désignons par $S_1,\cdots,S_n,\cdots$ les temps de saut successifs de $N=1_{\{\gamma(x)>\varepsilon\}}\star\underline{\mu}$ et posons

$$X(\varepsilon)_t = X_t - \sum_{p:S_p\leq t}\Delta X_{S_p}.$$

Pour n assez grand, on a

$$\begin{aligned}
F_1^n(g,\varepsilon) &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{p:\ S_p\leq t}\left[g'_\varepsilon\left(Z_{\phi^n(S_p)},\Delta_i^nX(\varepsilon)+\Delta X_{S_p}\right)\ -\ g'_\varepsilon\left(Z_{S_p-},\Delta X_{S_p}\right)\ \right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{p:\ S_p\leq t}\left[\Delta_i^nX(\varepsilon)\frac{\partial g'_\varepsilon}{\partial x}\left(\bar{Z}_p^n,\bar{Y}_p^n\right)\ +\ \sum_{j=1}^d\left(Z^j_{\phi^n(S_p)}-Z^j_{S_p-}\right)\frac{\partial g'_\varepsilon}{\partial z^j}\left(\bar{Z}_p^n,\bar{Y}_p^n\right)\right].
\end{aligned}$$

où $\bar{Z}_p^n$ est entre $Z_{\phi^n(S_p)}$ et Z_{S_p-} et $\bar{Y}_p^n$ entre $\Delta_i^nX(\varepsilon)+\Delta X_{S_p}$ et ΔX_{S_p}. De façon similaire aux lemmes 3.4.5 et 3.4.6, on montre que

- $$\left[\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\left(X_{\phi^n(S_p)+\Delta_n}-X_{\phi^n(S_p)}-\Delta X_{S_p}\ ;\ \left(Z^j_{\phi^n(S_p)}-Z^j_{S_p-}\right)_{1\leq j\leq d}\right)\right]_{p\geq 1},$$

  converge stablement en loi vers le processus

  $$\left[\sigma'^{d+1,k}_{S_p}\ V'_{k,p}\ \sqrt{1-\kappa_p}\ +\ \sigma'^{d+1,k}_{S_p-}\ V_{k,p}\ \sqrt{\kappa_p}\ ;\ \left(-\sqrt{\kappa_p}\sum_{k=1}^m\sigma'^{j,k}_{S_p-}V_{k,p}\right)_{1\leq j\leq d}\right]_{p\geq 1}.$$

- ensuite $F_1^n(g,\varepsilon)$ converge stablement en loi vers le processus

$$\sum_{p:\ S_p\leq t}\sum_{k=1}^m\left[\left(\sigma'^{d+1,k}_{S_p}\ V'_{k,p}\ \sqrt{1-\kappa_p}\ +\ \sigma'^{d+1,k}_{S_p-}\ V_{k,p}\ \sqrt{\kappa_p}\ \right)\frac{\partial g'_\varepsilon}{\partial x}\left(Z_{S_p-},\Delta X_{S_p}\right)\right.$$
$$\left.-\ \sqrt{\kappa_p}\ V_{k,p}\ \sum_{j=1}^d\sigma'^{j,k}_{S_p-}\ \frac{\partial g'_\varepsilon}{\partial z^j}(Z_{S_p-},\Delta X_{S_p})\right].$$

Vu que $g'_\varepsilon(z,x)=0$ si $|x|\leq 2\varepsilon$, le processus précédent est égal en loi conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}$ au processus

$$F(\varepsilon)_t\ :=\ \sum_{p:\ T_p\leq t}\sum_{k=1}^m\left[\left(\sigma'^{d+1,k}_{T_p}\ V'_{k,p}\ \sqrt{1-\kappa_p}\ +\ \sigma'^{d+1,k}_{T_p-}\ V_{k,p}\ \sqrt{\kappa_p}\ \right)\frac{\partial g'_\varepsilon}{\partial x}\left(Z_{T_p-},\Delta X_{T_p}\right)\right.$$
$$\left.-\ \sqrt{\kappa_p}\ V_{k,p}\ \sum_{j=1}^d\sigma'^{j,k}_{T_p-}\ \frac{\partial g'_\varepsilon}{\partial z^j}(Z_{T_p-},\Delta X_{T_p})\right].$$

Rappelons que

$$F_t\ :=\ \sum_{p:\ T_p\leq t}\sum_{k=1}^m\left[\left(\sigma'^{d+1,k}_{T_p}\ V'_{k,p}\ \sqrt{1-\kappa_p}\ +\ \sigma'^{d+1,k}_{T_p-}\ V_{k,p}\ \sqrt{\kappa_p}\ \right)\frac{\partial g}{\partial x}\left(Z_{T_p-},\Delta X_{T_p}\right)\right.$$

$$- \sqrt{\kappa_p}\; V_{k,p} \; \sum_{j=1}^{d} \sigma'^{j,k}_{T_p-} \; \frac{\partial g}{\partial z^j}(Z_{T_p-}, \Delta X_{T_p}) \Bigg] .$$

On a :

$$\begin{aligned} F_t - F(\varepsilon)_t \quad := \quad & \sum_{p:\; T_p \le t} \; \sum_{k=1}^{m} \Bigg[\Big(\sigma'^{d+1,k}_{T_p} \; V'_{k,p} \; \sqrt{1-\kappa_p} \; + \; \sigma'^{d+1,k}_{T_p-} \; V_{k,p} \; \sqrt{\kappa_p} \Big) \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial x} \left(Z_{T_p-}, \Delta X_{T_p} \right) \\ & - \sqrt{\kappa_p}\; V_{k,p} \; \sum_{j=1}^{d} \sigma'^{j,k}_{T_p-} \; \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial z^j}(Z_{T_p-}, \Delta X_{T_p}) \Bigg] . \end{aligned}$$

Comme dans la deuxième étape de la preuve du théorème 3.2.1, on montre en utilisant cette fois-ci le lemme 3.3.6 que

$$F_t - F(\varepsilon)_t \longrightarrow^{u.c.p.} \; 0, \quad \text{quand } \varepsilon \to \; 0.$$

A ce stade, le théorème 3.3.4 est prouvé sous l'hypothèse (LN_1). On finit la preuve du théorème 3.3.4 comme on l'a fait pour la preuve du théorème 3.2.1 par une procédure de "délocalisation".

3.5 Généralisation aux subdivisions non régulières

Dans les résultats de la section 3.1, on a considéré pour chaque n fixé la subdivision $\{0, \Delta_n, 2\Delta_n, \cdots, i\Delta_n, \cdots\}$. En prenant une suite de subdivisions quelconques de $\mathbb{R}_+$, non aléatoires : $\{0 = t_0^n < \cdots < t_i^n < t_{i+1}^n < \cdots\}$ dont le pas tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on aimerait savoir si les résultats obtenus jusqu'à présent restent valables. En d'autres termes pour une fonction $f : \; \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on va étudier la convergence des sommes :

$$\sum_{i: t_i^n \le t} f \left(\; t_{i-1}^n \; , \; X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \; \right)$$

quand n tend vers l'infini. On étudiera d'abord le cas où X a des sauts avant de passer au cas continu. Nous rappelons que l'on a pas étudier ce dernier cas dans le cadre des subdivisions régulières.

3.5.1 Le cas d'une semimartingale discontinue

Hypothèses et Notations

Hypothèse (P) La suite de subdivisions (π_n) de $\mathbb{R}_+$ qui s'écrit $\pi_n := \{0 = t_0^n, t_1^n, \cdots, t_k^n, \cdots\}$ où $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{k-1}^n < t_k^n < \cdots$ et $\sup_{i \in \mathbb{N}} |t_{i+1}^n - t_i^n|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. $\square$

Soit (π_n) une suite de subdivisions vérifiant (P). Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on définit

$$t(\pi^n) = \sup\{t_i^n \in \pi^n, \; t_i^n \le t\}. \tag{3.5.1}$$

Dans toute la suite de cette section, f désigne une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, X est une semimartingale réelle de caracteristiques (B, C, ν) et (π^n) est une suite de subdivisions de $\mathbb{R}_+$ vérifiant l'hypothèse (P).

Lois des grands nombres

Théorème 3.5.1 *Soit f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, optionnelle et soit X une semimartingale. On suppose vérifiée l'une des conditions suivantes :*

Cas 1. *la fonction f et la semimartingale X vérifient les hypothèses du théorème 3.1.4. On rappelle dans ce cas que*

$$\begin{aligned} D^1(f)_t \quad := \quad & \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s-,0)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s-,0)\, dC_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s-,0)\, dX_s^c \; + \\ & \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s-,0)h(x)\right) \star (\mu - \nu)_t + \sum_{0<s\leq t} \left[f(s-,\Delta X_s) - h(\Delta X_s)\frac{\partial f}{\partial x}(s-,0)\right]. \end{aligned}$$

Cas 2. *f et X vérifient les hypothèses du théorème 3.1.5 et le processus $D^1(f)$ s'écrit :*

$$D^1(f)_t = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s-,0)\, dB_s + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s-,0)h(x)\right) \star (\mu-\nu)_t + \sum_{0<s\leq t}\left[f(s-,\Delta X_s) - h(\Delta X_s)\frac{\partial f}{\partial x}(s-,0)\right].$$

Alors,

$$\sum_{i:\ t_i^n \leq t} f\left(t_{i-1}^n \ ,\ X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right) \ - \ D^1(f)_{t(\pi^n)} \ \longrightarrow^{u.c.p.} \ 0,$$

quand $n \to \infty$, ce qui implique que

$$\sum_{i:\ t_i^n \leq t} f\left(t_{i-1}^n \ ,\ X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right) \ \longrightarrow \ D^1(f)_t$$

en probabilité pour la topologie de Skorokhod.

On peut généraliser le théorème précédent au cas où les éléments de (π^n) sont des temps d'arrêts et où $\pi^n = \pi^n(\omega)$ vérifie (P) pour preque tout ω.

Théorème 3.5.2 *Si f et X vérifient les hypothèses du théorème 3.1.6 où celles du théorème 3.1.9, alors*

$$\sum_{i:\ t_i^n \leq t} f\left(t_{i-1}^n \ ,\ X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right) \ - \ D^1(f)_{t(\pi^n)}$$

converge localement uniformément en temps vers 0, d'où

$$\sum_{i:\ t_i^n \leq t} f\left(t_{i-1}^n \ ,\ X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right)$$

converge tout simplement vers $D^1(f)_t$ au sens de Skorokhod. Avec

$$D^1(f)_t := \sum_{0<s\leq t} f(s-, \Delta X_s) \ + \ \int_0^t \gamma_s \, d\overline{B}_s,$$

pour le théoème 3.1.6 et

$$D^1(f)_t := \sum_{0<s\leq t} f(s-, \Delta X_s)$$

pour le théorème 3.1.9.

Preuve du théorème 3.5.1 et 3.5.2

Le schéma des preuves reste identique au schéma des des théorèmes 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6 et 3.1.9, il ya juste à prendre en compte le caractère non régulier des subdivisions.

Théorème central limite

Rappelons l'hypothèse (H_1) introduite dans la section 3.2. On rappelle également le processus

$$D^2(f)_t \ := \ \sum_{p:S_p\leq t} \frac{\partial f}{\partial x}(S_p-, \Delta X_{S_p}) \left(\sqrt{\kappa_p} U_p \sigma_{S_p-} + \sqrt{1-\kappa_p} U_p^{'} \sigma_{S_p}\right)$$

qui est bien définit sous les hypothèses du théorème 3.2.1.

Théorème 3.5.3 *Supposons que X vérifie (H_1) et que f vérifie les hypothèses de la partie A du théorème 3.2.1 . Alors la suite de processus*

$$\sum_{i:\ t_i^n\leq t} \left[\frac{f\left(t_{i-1}^n, X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right) - \sum_{t_{i-1}^n<s\leq t_i^n} f\left(t_{i-1}^n, \Delta X_s\right)}{\sqrt{t_i^n - t_{i-1}^n}} \right]$$

converge stablement en loi vers le processus $D^2(f)$.

Si de plus, f vérifie les hypothèses de la partie B du théorème 3.2.1 alors quand $n \to \infty$, la suite de processus

$$\sum_{i:\ t_i^n\leq t} \left[\frac{f\left(t_{i-1}^n, X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right) - \sum_{t_{i-1}^n<s\leq t_i^n} f\left(s-, \Delta X_s\right)}{\sqrt{t_i^n - t_{i-1}^n}} \right]$$

converge stablement en loi vers le processus $D^2(f)$

Preuve du théorème 3.5.3

Soit (π^n) une suite de subdivisions de $\mathbb{R}$, dont le pas tend vers 0. pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, il existe $t_{i-1}^n, t_i^n \in \mathbb{R}$ tels que $t_{i-1}^n < x \leq t_i^n$. On notera ces points respectivement par $x_-(\pi^n)$ et $x_+(\pi^n)$.

Remarque 3.5.4 *Les notations précédentes sont à ne pas confondre avec (3.5.1), la difference est la suivante : soit $t \in \mathbb{R}_+$, pour chaque n fixé, deux cas sont possibles,*

- *ou bien t est strictement compris entre deux points de π^n : il existe $t_{i-1}^n,\ t_i^n\ \in \pi^n$ tels que $t_{i-1}^n < t < t_i^n$, dans ce cas, on a*

$$t_-(\pi^n) = t_{i-1}^n = t(\pi^n)$$

- *ou alors, il existe $t_i^n \in \pi^n$ tel que $t_i^n = t$ et dans ce cas*

$$t_-(\pi^n) = t_{i-1}^n < t_+(\pi^n) = t(\pi^n).$$

D'après un vieux résultat de Tukey [19], la partie fractionnaire d'une suite de variables absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue converge en loi vers la distribution uniforme sur $[0,1]$. On généralise ce résultat dans le sens suivant :

Lemme 3.5.5 *Soit T une variable aléatoire réelle admettant une densité f. On suppose que f est p.s. continue et qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $K_{\varepsilon_0} \geq 0$ telle que pour tout x, y appartenant à $\mathbb{R}$ tels que $|x-y| \leq \varepsilon_0$, on a $f(y) \leq K_{\varepsilon_0} f(x)$. Alors la suite de variables*

$$\frac{T - T_-(\pi^n)}{T_+(\pi^n) - T_-(\pi^n)}$$

converge en loi vers la distribution uniforme sur $[0,1]$.

Preuve Posons $U^n = \frac{T-T_-(\pi^n)}{T_+(\pi^n)-T_-(\pi^n)}$ et $\Psi_n(u) = \mathbb{E}\{exp\{iuU_n\}\}$. On a

$$\begin{aligned}
\Psi_n(u) &= \mathbb{E}\left\{\sum_i exp\left\{iu\frac{T - t_{i-1}^n}{t_i^n - t_{i-1}^n}\right\} 1_{\{t_{i-1}^n < T \leq t_i^n\}}\right\} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_i exp\left\{iu\frac{y - t_{i-1}^n}{t_i^n - t_{i-1}^n}\right\} 1_{\{t_{i-1}^n < y \leq t_i^n\}}\right) f(y)\,dy \\
&= \sum_i \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} exp\left\{iu\frac{y - t_{i-1}^n}{t_i^n - t_{i-1}^n}\right\} f(y)\,dy \\
&= \sum_i \int_0^1 exp\{iuz\}(t_i^n - t_{i-1}^n) f\left(t_{i-1}^n + z(t_i^n - t_{i-1}^n)\right)\,dz \\
&= \int_0^1 exp\{iuz\}\left(\sum_i (t_i^n - t_{i-1}^n) f\left(t_{i-1}^n + z(t_i^n - t_{i-1}^n)\right)\right)\,dz.
\end{aligned}$$

Considérons la fonction

$$f^n(x) := \sum_i f\left(t_{i-1}^n + z(t_i^n - t_{i-1}^n)\right) 1_{\{t_{i-1}^n < x \leq t_i^n\}}$$

L'intégrale de cette fonction sur $\mathbb{R}$ vaut

$$\sum_i (t_i^n - t_{i-1}^n) f\left(t_{i-1}^n + z(t_i^n - t_{i-1}^n)\right).$$

Par ailleurs, $f^n(x) \leq K_{\varepsilon_0} f(x)$. Donc

$$\sum_i (t_i^n - t_{i-1}^n) f\left(t_{i-1}^n + z(t_i^n - t_{i-1}^n)\right)$$

converge vers 1 quand $n \to \infty$ par le théorème de Lebesgue.

Il suit que $\Psi_n(u)$ converge vers $\int_0^1 exp\{iuz\}\, dz = \frac{e^{iu}-1}{iu}$. Cette dernière quantité est la fonction caractéristique d'une loi uniforme.

Soit $\varepsilon > 0$, $E = \{x : |\gamma(x)| > \varepsilon\}$ et $N_t = 1_E \star \underline{\mu}_t$. On désigne par (T'_p) les temps de sauts successifs de N_t. Le lemme suivant se démontre comme le lemme 3.4.5 sauf qu'on utilise le lemme 3.5.5 à la place du résultat de Turkey. Les notations utilisées sont celles du lemme 3.5.5

Lemme 3.5.6 *Supposons* (LH_1) *vérifiée alors*

$$\left(\frac{\sigma_{T'_{p_-}(\pi^n)}(W_{T'_p} - W_{T'_{p_-}(\pi^n)})}{\sqrt{T'_{p_+}(\pi^n) - T'_{p_-}(\pi^n)}} \ ; \ \frac{\sigma_{T'_p}(W_{T'_{p_+}(\pi^n)} - W_{T'_p})}{\sqrt{T'_{p_+}(\pi^n) - T'_{p_-}(\pi^n)}}\right)_{p\geq 1}$$

converge stablement en loi vers

$$\left(\sigma_{T'_p-} U_p \sqrt{\kappa_p} \ ; \ \sigma_{T'_p} U'_p \sqrt{1-\kappa_p}\right)_{p\geq 1}$$

Le schéma de la démonstration du théorème 3.5.3 est le même que celui du théorème 3.2.1 sauf que l'on utilise la subdivision (π_n) à la place de $\{0, \Delta_n, \cdots, [t/\Delta_n]\Delta_n\}$ et le lemme 3.5.6 à la place du lemme 3.4.5.

Les résultats concernant les fonctions auxiliaires

Dans cette partie, g est une fonction de $\mathbb{R}^{d+1}$ dans $\mathbb{R}$ et Z est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On rappelle qu'on a posé

$$\begin{aligned} D^1(g,Z)_t &= \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(Z_{s-},0)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(Z_{s-},0)dC_s + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(Z_{s-},0)dX_s^c \\ &\quad + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(Z_{s-},0)h(x)\right)(\underline{\mu} - \underline{\nu})_t + \sum_{0\leq s\leq t}\left[g(Z_{s-},\Delta X_s) - h(\Delta X_s)\frac{\partial g}{\partial x}(Z_{s-},0)\right] \end{aligned}$$

qui est bien défini sous les hypothèses du thórème 3.3.1. Le résultat suivant est à l'image du théorème 3.3.1 et est une conséquence immédiate du théorème 3.5.1.

Théorème 3.5.7 *Supposons que Z soit càdlàg, adapté et que g vérifie les hypothèses du corollaire 3.3.1. Alors*

$$\sum_{i:\ t_i^n \leq t} g\left(Z_{t_{i-1}^n}, X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right) \;\longrightarrow\; D^1(g,Z)_t$$

en probabilité pour la topologie de Skorokhod quand $n \to \infty$.

On peut à présent énoncer le théorème central limite associé au théorème 3.5.7. On utilise l'hypothèse (N_1) définie dans la section 3.3 ainsi que le processus

$$\begin{aligned} F_t \;:=\; & \sum_{p:\ T_p \leq t} \sum_{k=1}^{m} \Bigg[\left(\sigma'^{d+1,k}_{T_p} \, V'_{k,p} \, \sqrt{1-\kappa_p} \;+\; \sigma'^{d+1,k}_{T_p -} \, V_{k,p} \, \sqrt{\kappa_p} \right) \frac{\partial g}{\partial x} \left(Z_{T_p -}, \Delta X_{T_p} \right) \\ & - \sqrt{\kappa_p} \, V_{k,p} \sum_{j=1}^{d} \sigma'^{j,k}_{T_p -} \, \frac{\partial g}{\partial z^j} (Z_{T_p -}, \Delta X_{T_p}) \Bigg] \end{aligned}$$

qui est bien défini sous les hypothèses du théorème 3.3.4.

Théorème 3.5.8 *Supposons que le couple (Z,X) vérifie l'hypothèse (N_1) et que g vérifie les hypothèses du théorème 3.3.4. Alors,*

$$\sum_{i:\ t_i^n \leq t} \left[\frac{g\left(Z_{t_{i-1}^n}, X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right) - \sum_{t_{i-1}^n < s \leq t_i^n} g\left(Z_{s-}, \Delta X_s\right)}{\sqrt{t_i^n - t_{i-1}^n}} \right]$$

convergent stablement en loi vers F.

La preuve de ce théorème est identique à celle du théorème 3.3.4, mis à part le fait les subdivisions sont irrégulières et ce qui impose l'utilisation du lemme 3.5.6 à la place du lemme 3.4.5.

3.5.2 Cas d'une semimartingale continue

Nous supposons dans ce paragraphe que X est de la forme

$$X_t \;=\; X_0 \;+\; \int_0^t b_s \, ds \;+\; \int_0^t \sigma_s \, dW_s,$$

où b est un processus adapté, localement borné et continu à gauche alors que σ est adapté et càdlàg. Comme dans la section précédente, (π^n) est une suite de subdivisions vérifiant (P). pour tout processus Y, on notera $\Delta_i^n Y = Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}$. Dans cette sous-section, f est une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et C^2 sur un voisinage de 0, alors

$$\sum_{i:\ t_i^n \leq t} f\left(\ \Delta_i^n X\ \right) \;\longrightarrow\; D^1(f)_t$$

en probabilité pour la topologie de Skorokhod quand $n \to \infty$, où

$$D^1(f)_t := f'(0)(X_t - X_0) + \frac{1}{2} f''(0) \int_0^t \sigma_s^2 \, ds. \tag{3.5.2}$$

On pose Soit $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ un espace auxiliaire muni d'un mouvement brownien $\overline{W}$. On pose

$$\widetilde{\Omega} = \Omega \times \Omega', \quad \widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', \quad \widetilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}'$$

Les processus définis sur Ω où Ω' peuvent être considérés comme définis sur $\widetilde{\Omega}$.

Théorème 3.5.9 *Soit f une fonction C^3 sur un voisinage de 0 et telle que $f(0) = 0$. On a*

$$\sum_{i:\ t_i^n \leq t} \left[\frac{f\left(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right) - \Delta_i^n D^1(f)}{\sqrt{t_i^n - t_{i-1}^n}} \right]$$

converge stablement en loi vers le processus

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left| f''(0) \right| \int_0^t (\sigma_s)^2 \, d\overline{W}_s.$$

Remarque 3.5.10 *Nous n'avons pas étudié le cas d'une fonction définie sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, car alors les hypothèses deviennent plus qu'ailleurs très restrictives.*

Remarque 3.5.11 *Nous donnons les grandes lignes de la preuve de ce théorème, néanmoins les techniques (nouvelles) utilisées ici seront largement développées dans les prochains chapitres. Les outils essentiels dans cette preuve sont les théorèmes du paragraphe 7 chapitre IX de [10].*

Preuve :

On utilisera les notations dans la preuve du théorème 3.5.3. On pose

$$Z^n(f)_t := \sum_{i:\ t_i^n \leq t} \frac{f\left(\Delta_i^n X\right) - \Delta_i^n D^1(f)}{\sqrt{t_i^n - t_{i-1}^n}}. \tag{3.5.3}$$

Fixons $\varepsilon > 0$ assez petit. On pose $f_\varepsilon = f \psi_\varepsilon$ (voir(3.4.13) pour ψ_ε). Il suit que

$$Z^n(f) := Z^{n,1}(f, \varepsilon) \ + \ Z^{n,2}(f, \varepsilon), \tag{3.5.4}$$

où

$$\left.\begin{array}{rcl} Z^{n,1}(f,\varepsilon)_t & = & \sum_{i:\ t_i^n \leq t} \frac{f(1-\psi_\varepsilon)\left(\Delta_i^n X\right)}{\sqrt{t_i^n - t_{i-1}^n}}, \\ Z^{n,2}(f,\varepsilon)_t & = & \sum_{i:\ t_i^n \leq t} \frac{f_\varepsilon\left(\Delta_i^n X\right) \ - \ \Delta_i^n D^1(f_\varepsilon)}{\sqrt{t_i^n - t_{i-1}^n}}. \end{array}\right\} \tag{3.5.5}$$

Remarquons que comme $f'(0) = f_\varepsilon'(0)$ et $f''(0) = f_\varepsilon''(0)$, on a $D^1(f) = D^1(f_\varepsilon)$.

Etape 1 : Nous traitons ici le terme $Z^{n,1}(f,\varepsilon)$. Notons que

$$1_{\{|x|>2\varepsilon\}} \;\leq\; 1-\psi_\varepsilon(x) \;\leq\; 1_{\{|x|>\varepsilon\}}.$$

Vu que X est continue, il s'en suit que pour tout $\omega\in\Omega$, il existe $n_0(\omega)\in N$ tel que $\forall\ n\geq n_0(\omega)$, on a $|\Delta_i^n X|\leq\varepsilon$ et d'où $f(1-\psi_\varepsilon)\,(\Delta_i^n X)=0$.

On conclut que pour tout $\omega\in\Omega$, on a

$$\sup_{s\leq t}|Z^{n,1}(f,\varepsilon)(\omega)|\longrightarrow 0,\quad \text{quand } n\to\infty.$$

Etape 2 : Nous étudions ici $Z^{n,2}(f,\varepsilon)$. D'après la formule d'Itô comme on l'a fait dans la preuve du théorème 3.1.4, posant $Y_0=0$ et $Y_s^n=X_s-X_{t_{i-1}^n}$ si $s\in]t_{i-1}^n,t_i^n]$ et $Y_0^n=0$, on a :

$$Z_t^n=\sum_{i=1}^{k^n}\xi_i^n,$$

où k^n est l'entier i tel que $t(\pi^n)=t_i^n$ et où

$$\begin{aligned}\xi_i^n &= \frac{1}{\sqrt{t_i^n-t_{i-1}^n}}\left[\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}\left(b_s\left(f_\varepsilon'(Y_s^n)-f_\varepsilon'(0)\right)+\frac{\sigma_s^2}{2}\left(f_\varepsilon''(Y_s^n)-f_\varepsilon''(0)\right)\right)ds\right.\\ &\quad\left.+\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}\sigma_s\left(f_\varepsilon'(Y_s^n)-f_\varepsilon'(0)\right)dW_s.\right]\end{aligned}$$

Pour ε assez petit, f_ε est C^3, on montre que les sommes

$$\sup_t\left|\sum_{i=1}^{k^n}\mathbb{E}\{\xi_i^n|\mathcal{F}_{t_{i-1}^n}\}\right|\quad\text{et}\quad\sum_{i=1}^{k^n}\mathbb{E}\left\{\xi_i^n(W_{t_{i-1}^n}-W_{t_i^n})\;\middle|\mathcal{F}_{t_{i-1}^n}\right\}$$

convergent en probabilité vers 0. Soit N est une martingale bornée orthogonale à W et $\varepsilon>0$, on montre également que

$$\sum_{i=1}^{k^n}\mathbb{E}\left\{|\xi_i^n|^2 1_{\{|\xi_i^n|>\varepsilon\}}\;|\mathcal{F}_{t_{i-1}^n}\right\}\quad\text{et}\quad\sum_{i=1}^{k^n}\mathbb{E}\left\{\xi_i^n(W_{t_{i-1}^n}-W_{t_i^n})\;|\mathcal{F}_{t_{i-1}^n}\right\}.$$

De même, on a

$$\sum_{i=1}^{k^n}\left[\mathbb{E}\left\{(\xi_i^n)^2|\mathcal{F}_{t_{i-1}^n}\right\}\;-\;\left(\mathbb{E}\left\{\xi_i^n|\mathcal{F}_{t_{i-1}^n}\right\}\right)^2\right]\;\rightarrow\;\frac{1}{2}\left(f''(0)\right)^2\int_0^t(\sigma_s)^4\,ds$$

en probabilité. D'après ce qui précéde, Z^n vérifie les hypothèses du théorème 7.28 chapitre IX de [10].

Remarque 3.5.12 *On aurait pu prouver ce théorème en utilisant la partie (ii) du théorème 2.11 de [8] dans le cas où X est continu, combiné au développement de Taylor de f au voisinage de* 0 *mais, nos hypothèses sur σ ici sont plus faibles.*

Chapitre 4

Convergence de fonctionnelles de semimartingales normalisées

Ce chapitre est consacré à l'étude de la convergence de la suite de processus

$$V_t^n := \Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \tag{4.0.1}$$

où X est une semimartingale d'Itô fixée, f une fonction optionnelle de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et où (Δ_n) est une suite tendant vers 0 quand $n \to \infty$. La normalisation par $\sqrt{\Delta_n}$ s'explique par le fait que si X vérifie l'hypothèse (H_2) ci-dessus, le terme dominant de $\Delta_i^n X$ est, en l'absence de grand saut, la partie brownienne, qui est d'ordre $\sqrt{\Delta_n}$.

4.1 Loi des grands nombres

4.1.1 Hypothèses et Notations

On considère une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ et une semimartingale réelle X de mesure de sauts μ et de caractéristiques (B, C, ν) par rapport à une fonction de troncation h. On pose $h'(x) = x - h(x)$.

Commençons par les hypothèses sur le processus X.

Hypothèse (H_2) La semimartingale X peut s'écrire sous la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s\, ds + \int_0^t \sigma_s\, dW_s + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t h(\delta(s,x))\, (\underline{\mu} - \underline{\nu})(ds, dx) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h'(\delta(s,x))\, \underline{\mu}(ds, dx), \tag{4.1.1}$$

où

- b est un processsus prévisible, localement borné,
- σ est un processus càdlàg, adapté,
- W est un mouvement brownien et $\underline{\mu}$ est une mesure aléatoire de poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, l'espace étant élargi pour définir W et $\underline{\mu}$,

- $\underline{\nu}$ est la mesure compensatrice de $\underline{\mu}$, elle s'écrit : $\underline{\nu}(dt, dx) = F(dx)dt$ où $F(dx)$ est une mesure σ-finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ de masse totale infinie,
- $\delta : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est prévisible et est telle que le processus $\int_0^t \left(1 \wedge |\delta(\omega, s, x)|^2\right) F(dx)$ soit localement borné.

□

L'hypothèse (H_2) est un peu plus faible que l'hypothèse (H_1) introduite dans le chapitre 3, et si X est continue, elles sont équivalentes.

La partie martingale continue de X s'écrit :

$$X_s^c = \int_0^t \sigma_s \, dW_s. \tag{4.1.2}$$

Définition 4.1.1 **A.** *Soit $p > 0$. On dira que f est à croissance au plus p-polynomiale, s'il existe un processus Γ localement borné tel que :*

$$|f(\omega, s, x)| \leq \Gamma_s(\omega)[1 + |x|^p]. \tag{4.1.3}$$

Si f vérifie (4.1.3) et que p ne joue pas un rôle important, on dira simplement que f est à croissance polynomiale.

B. *Pour tout vecteur ligne $x \in \mathbb{R}^m$, on notera ρ_x, la loi normale $\mathcal{N}(0, xx^t)$, où x^t est la transposée de x.*

4.1.2 Résultats

Théorème 4.1.2 *Soit $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application optionnelle et à croissance p-polynomiale. On suppose que f est localement équicontinue (voir définition 3.1.1) et que f admet des limites à gauche en s. Alors,*

$$\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}) \longrightarrow^{u.c.p.} \int_0^t \rho_{\sigma_s}(f(s-, .)) \, ds,$$

si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. *X vérifie (H_2) et $p \in [0, 2[$.*
2. *X vérifie (H_2) et est continue.*

Remarque 4.1.3 *Dans le théorème précèdent, f est à croissance au plus polynomiale, ce qui veut dire que :*

$$|f(\omega, s, x)| \leq \Gamma_s(\omega)[1 + |x|^p].$$

Le théorème reste vrai si $p = p_s(\omega)$ est un processus localement borné et pour le cas (1) du théorème avec $\sup_{s,\omega} p_s(\omega) < 2$.

4.2 Théorème central limite

4.2.1 Hypothèses et Notations

On part toujours d'une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. On se donne l'hypothèse suivante :

Hypothèse (H_3) X peut s'écrire sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s\, ds + \int_0^t \sigma_s\, dW_s + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t h(\delta(s-,x)) \star (\underline{\mu} - \underline{\nu})(ds,dx) + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t h'(\delta(s-,x) \star \underline{\mu}(ds,dx), \tag{4.2.1}$$

où

- b est un processsus càdlàg adapté,
- σ est un processus càdlàg, adapté,
- δ est une foncton de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, làg en s et de plus, il existe une suite de temps d'arrêts (T_k) croissant vers l'infini et une suite de fonctions (γ_k) définies sur $\mathbb{R}$ et boréliennes telles que pour tout k, on ait

$$\sup_{s\leq T_k(\omega)} |\delta(\omega,s,x)| \ \leq\ \gamma_k(x) \quad \text{et} \quad \int_0^t \{\gamma_k(x) \wedge 1\}\ F(dx)\ < \infty. \tag{4.2.2}$$

□

Du fait que b est càdlàg, et à cause de la condition (4.2.2) qui implique notamment que $1 \in I$ (cf. sous-section 3.1.1), l'hypothèse (H_3) est beaucoup plus forte que l'hypothèse (H_1) de la sous-section 4.1.

L'hypothèse suivante ne porte plus directement sur X mais sur le processus σ qui intervient dans (4.1.2).

Hypothèse (M_1) On a (H_3) et de plus, le processus σ s'écrit

$$\sigma_t = \sigma_0 + \int_0^t \widetilde{b}_s ds + \int_0^t \widetilde{\sigma}_s dW_s + \int_0^t v_{s-} dV_s + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t h(\widetilde{\delta}) \star (\underline{\mu} - \underline{\nu})(ds,dx) + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t h'(\widetilde{\delta}(s-,x)) \star \underline{\mu}(ds,dx),$$

où

- $\widetilde{b}$ est un processus prévisible, localement borné
- $\widetilde{\sigma}$ et v sont des processus càdlàg, adaptés,
- V est un mouvement brownien indépendant de W,
- $\widetilde{\delta}$ est une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour s, l'application $(\omega, x) \to \widetilde{\delta}(\omega, s, x)$ soit $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{R}$-mesurable. On suppose que $\widetilde{\delta}$ est càdlàg en s, de plus le processus $\int_{\mathbb{R}} \left\{ \sup_{s\leq t} \left(1 \wedge |\widetilde{\delta}(s,x)|^2 \right) \right\}\ F(dx)$ est localement borné .

□

Soit $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ un espace auxiliaire muni d'un mouvement brownien $\overline{W}$. On pose

$$\widetilde{\Omega} = \Omega \times \Omega', \quad \widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', \quad \widetilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}'$$

Les processus définis sur Ω où Ω' peuvent être considérés comme définis sur $\widetilde{\Omega}$. On définit sur $\widetilde{\mathcal{F}}$ la filtration $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)$ qui est la plus petite filtration continue à droite, contenant $(\mathcal{F}_t)$, telle que $\overline{W}$ soit adapté.

4.2.2 Résultats

Théorème 4.2.1 **A.** *Supposons l'hypothèse (M_1) vérifiée et X continu. On se donne une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, optionnelle et vérifiant les propriétés suivantes :*

- *le processus $(f(s, 0))$ est localement borné,*
- *l'application $s \to f(\omega, s, x)$ admet des limites à gauche,*
- *L'application $x \to f(\omega, s, x)$ est paire et dérivable,*
- *$\frac{\partial f}{\partial x}$ est localement équicontinue (voir définition 3.1.1) et à croissance au plus polynomiale (au sens de (4.1.3).*

Alors quand n tend vers ∞, la suite de processus

$$\sqrt{\Delta_n} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \left[f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \; - \; \mathbb{E}\left\{ f\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right) \; |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \right\} \right]$$

converge stablement en loi vers le processus

$$L_t(f) \; := \; \int_0^t \sqrt{\rho_{\sigma_s}\left(f(s-,.)^2\right) - \left(\rho_{\sigma_s}\left(f(s-,.)\right)\right)^2} \; d\overline{W}_s. \tag{4.2.3}$$

B. *Si de plus, il existe un processus Γ localement borné, des réels $\alpha > \frac{1}{2}$ et $p \geq 0$ tels que pour tout $T > 0$ on ait :*

$$|f(\omega, s, x) \; - \; f(\omega, t, x)| \; \leq \; \Gamma'_T |t-s|^\alpha [\, 1 + |x|^p \,], \quad \forall \; s, \; t \leq T, \tag{4.2.4}$$

alors

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \left[\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \; - \; \int_0^t \rho_{\sigma_{s-}}\left(f(s-,.)\right) ds \right]$$

converge stablement en loi vers $L_t(f)$ quand n tend vers l'infini.

Théorème 4.2.2 **A.** *Supposons (M_1) vérifiée soit f une fonction $f : \; \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, optionnelle et vérifiant les propriétés suivantes :*

- *l'application $s \to f(\omega, s, x)$ admet des limites à gauche en s,*
- *on suppose que l'application $x \to f(\omega, s, x)$ est paire et C^1, que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est localement équicontinue et qu'il existe un processus Λ localement borné tel que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ |f(\omega, s, x)| \; + \; \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\omega, s, x) \right| \right\} \; \leq \; \Lambda_s(\omega).$$

Alors, quand n tend vers l'infini, la suite de processus

$$\sqrt{\Delta_n} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \left[f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \; - \; \mathbb{E}\left\{ f\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right) \; |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \right\} \right]$$

converge stablement en loi vers $L_t(f)$.

B. *Si en plus, il existe un processus Γ localement borné, des réels $\alpha > \frac{1}{2}$ et $p \geq 0$ tels que pour tout $T > 0$ on ait (4.2.4), alors le processus*

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \left[\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \; - \; \int_0^t \rho_{\sigma_{s-}}\left(f(s-,.)\right) ds \right]$$

converge stablement en loi vers $L_t(f)$.

4.3 Etude de la convergence d'une fonction auxiliaire

L'hypothèse 4.2.4 des théorèmes 4.2.1 et 4.2.2 étant trop restrictive, on se propose, comme on l'a fait dans le paragraphe 3.3 du chapitre 3 d'étudier le cas particulier des fonctions $f:\ \Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui s'écrivent sous la forme $f(\omega,s,x)=g(Z(\omega),x)$ où g est une applicaton de $\mathbb{R}^{d+1}$ dans $\mathbb{R}$, d est un entier et Z un processus de dimension d. Par application du Théorème 4.1.2, on a

Théorème 4.3.1 *Soit X une semimartingale réelle et Z un processus adapté, admettant des limites à gauche et localement borné de dimension d. Soit $g\ :\mathbb{R}^{d+1}\to\mathbb{R}$. On suppose que g est continue et telle que pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$, il existe une constante C_K vérifiant*

$$\sup_{z\in K}|g(z,x)|\leq C_K[1+|x|^p].$$

On suppose de plus que l'une des conditions suivantes est réalisée

- *X vérifie (H_2) et $p\in[0,2[$,*
- *X vérifie (H_2) et X continu.*

Alors, quand $n\to\infty$ on a :

$$\Delta_n\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}g\left(Z(i-1)\Delta_n,\frac{\Delta_i^nX}{\sqrt{\Delta_n}}\right)\longrightarrow^{u.c.p.}\int_0^t\rho_{\sigma_s}(g(Z_{s-},.))\,ds.$$

Passons maintenant aux théorèmes centraux limites. On va ici introduire une hypothèse similaire à l'hypothèse (N_1) introduite à la section 3.3 du chapitre 3 à la différence que les conditions sur sauts de X sont plus fortes et que l'on va tenir compte de l'hypothèse (M_1) et de la condition sur les sauts de X.

Rappelons la fonction de troncation h définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction h' définie par $h'(x)=x-h(x)$. Pour tout entier $k\ \geq\ 1$, On note $h^{(k)}$ et $h^{'(k)}$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}^k$ par

$$h^{(k)}\ =\begin{pmatrix}h\\h\\.\\.\\.\\h\end{pmatrix},\quad h^{'(k)}\ =\begin{pmatrix}h'\\h'\\.\\.\\.\\h'\end{pmatrix}.\tag{4.3.1}$$

Hypothèse (N_2) **:** Z est une semimartingale d'Itô et le couple (Z,X) admet une écriture sous la forme :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}X_t\\Z_t\end{pmatrix}\ &=\ \begin{pmatrix}X_0\\Z_0\end{pmatrix}+\textstyle\int_0^t b'_sds+\int_0^t\sigma'_sdW'_s+\int_0^t\int_{\mathbb{R}}h^{(1+d)}\left(\delta'(s,x)\right)(\underline{\mu}-\underline{\nu})(ds,dx)\\&\quad+\textstyle\int_0^t\int_{\mathbb{R}}h^{'(d+1)}\left(\delta'(s,x)\right)\underline{\mu}(ds,dx)\end{aligned}$$

et le processus σ' est un processus progressivement mesurable, localement borné, prenant ses valeurs dans l'espace des matrices de dimension $(1+d)\times m$. De plus le premier vecteur ligne vérifie

$$\begin{aligned}\sigma_t^{'1} &= \sigma_0^{'1} + \int_0^t \widehat{b}_s ds + \int_0^t \widehat{\sigma}_s dW'_s + \int_0^t \widehat{v}_{s-} dV_s + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t h^{(m)}(\widehat{\delta}) \star (\underline{\mu} - \underline{\nu})(ds,dx) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t h^{'(m)}(\widehat{\delta}(s-,x)) \star \underline{\mu}(ds,dx),\end{aligned}$$

avec

- b' est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^{1+d}$, prévisible, localement borné et $b^{'1+d}$ est làdcàg et adapté alors que $\widehat{b}$ est un vecteur ligne de dimension m, prévisible et localement borné.
- W' est ici un mouvement brownien m-dimensionnel.
- V est un mouvement brownien l-dimensionnel indépendant de W où $l \in \mathbb{N}$.
- $\widehat{\sigma}$ et v sont des processus càdlàg, adaptés et à valeurs respectivement dans l'espace des matrices de dimensions $m\times m$ et $m \times l$.
- $\widehat{\delta}: \ \Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ est une application càdlàg en temps et $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{R}$ mesurable en (ω, x) pour tout s fixé et de plus le processus $t \to \int_{\mathbb{R}} \left\{\sup_{s\le t}\left(1\wedge ||\widehat{\delta}(s,x)||^2\right)\right\} F(dx)$ est localement borné.
- $\delta': \ \Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d+1}$ est prévisible et telle que pour $j\in\{2,\cdots,d+1\}$, le processus $\int_{\mathbb{R}} \left(1\wedge|\delta^j(s,x)|^2\right) F(dx)$ est localement borné. On suppose de plus l'existence d'une suite de temps d'arrêt (T_k) qui croissent vers l'infini et une suite (γ_k) de fonctions boréliennes telle que

$$\sup_{s\le T_k(\omega)} \left|\delta^{'1}(\omega,s,x)\right| \ \le\ \gamma_k(x) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} (1\wedge\gamma_k(x))\ F(dx)\ <\infty.$$

$\square$

Notons que l'hypothèse (N_2) implique l'hypothèse (M_1).

Dans toute la suite, $\sigma^{'1}$ désigne le premier vecteur ligne de σ'.

Remarque 4.3.2 *Si (X,Z) vérifie l'hypothèse (N_2) et g les hypothèses du théorème 4.3.1, alors*

$$\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} g\left(Z(i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \longrightarrow^{u.c.p.} \int_0^t \rho_{\sigma_s^{'1}}(g(Z_s,.))\,ds.$$

Théorème 4.3.3 *Supposons (N_2) vérifiée et que X soit continu. Soit $g: \ \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, une fonction C^1 et telle que pour tout $z\in\mathbb{R}^d$, l'application $x\to g(z,x)$ soit paire. On suppose que pour tout compact $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}^d$, il existe une constante $C_{\mathcal{K}}$ et un réel positif p tels que*

$$\sup_{z\in K}\left\{\left|\frac{\partial g}{\partial x}(z,x)\right| \ +\ \sum_{j=1}^{d}\left|\frac{\partial g}{\partial z_j}(z,x)\right|\right\} \ \le\ C_{\mathcal{K}}\ [\ 1+|x|^p\ ].$$

Alors le processus

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\left[\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} g\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right)\ -\ \int_0^t \rho_{\sigma_s^{'1}}(g(Z_s,.))\ ds\right]$$

converge stablement en loi vers le processus

$$L'_t := \int_0^t \sqrt{\rho_{\sigma'^1_u}\left(g(Z_u,.)^2\right) \; - \; \left(\rho_{\sigma'^1_u}\left(g(Z_u,.)\right)\right)^2}\, d\overline{W}_u. \tag{4.3.2}$$

Théorème 4.3.4 *Supposons* (N_2) *vérifiée et soit* g *une fonction définie sur* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ *à valeurs réelles, de classe* C^1 *et vérifiant :*

- *pour tout* $z \in \mathbb{R}^d$*, l'application* $x \to g(z,x)$ *est paire,*
- *pour tout compact* $\mathcal{K}$ *de* $\mathbb{R}^d$*, il existe une constante* $C_{\mathcal{K}}$ *et un réel positif* p *tels que*

$$\sup_{z\in K}\left\{ \;|g(z,x)| \; + \; \left|\frac{\partial g}{\partial x}(z,x)\right| \;\right\} \le C_K, \quad \text{et} \quad \sup_{z\in K}\left\{ \sum_{j=1}^{d} \left|\frac{\partial g}{\partial z_j}(z,x)\right| \right\} \le C_K\,[\,1+|x|^p\,].$$

Alors, la suite de processus

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\left[\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} g\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \; - \; \int_0^t \rho_{\sigma'^1_s}(g(Z_s,.))\, ds\right]$$

converge stablement en loi vers L'_t*.*

4.4 Preuves

4.4.1 Preuve du Théorème 4.1.2

Préliminaires

Nous prouvons d'abord le théorème sous des hypothèse sur X et f un peu plus forte que celles énoncées.

Hypothèse (LH_2) On a (H_2) et de plus, les processus (b_s), (σ_s), $\left(\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge |x|^2)\; F_t(dx)\right)$ et le processus des sauts (ΔX_s) sont bornés par une constante. $\square$

Rappelons le processus Γ introduit dans la définition 4.1.1, on supposera pour l'instant que celui-ci est uniformément borné. On note toute les constantes par K et on pose

$$\beta_i^n := \sigma_{(i-1)\Delta_n} \frac{\Delta_i^n W}{\sqrt{\Delta_n}}. \tag{4.4.1}$$

Avant de commencer dans la preuve du théorème, nous commencerons par une série de lemmes.

Lemme 4.4.1 *Supposons* (LH_2) *vérifiée, que* f *soit optionnelle, vérifie* $(K(\mathbb{R}))$ *et soit à croissance au plus p-polynomiale. Alors,*

$$U^n(1)_t := \Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} E\left\{f\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right) | \mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\} \;\longrightarrow^{u.c.p.}\; \int_0^t \rho_{\sigma_{s-}}\left(f(s-,.)\right) ds,$$

quand $n \to \infty$*.*

Preuve Il suffit de prouver le théorème pour une fonction f positive. Par le théorème de Lebesgue, on a pour chaque t :

$$U_n(1)_t \;=\; \Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \rho_{\sigma_{(i-1)\Delta_n}} \left(f((i-1)\Delta_n, .)\right) \;\to\; \int_0^t \rho_{\sigma_{s-}} \left(f(s-, .)\right) ds, \qquad (4.4.2)$$

quand $n \to \infty$, car σ est càdlàg, donc l'application $s \to \rho_{\sigma_{s-}} \left(f(s-, .)\right)$ est càglàd. Remarquons ensuite que les processus $U^n(1)_t$ et $\int_0^t \rho\left(f(s-, \sigma_{s-}.)\right) ds$ sont croissants en temps et que $\int_0^t \rho\left(f(s-, \sigma_{s-}.)\right) ds$ est continu. On en déduit que la convergence dans (4.4.2) à lieu localement uniformément en temps. $\square$

Lemme 4.4.2 *Supposons que f soit optionnelle à croissance au plus p-polynomiale et localement équicontinue sur $\mathbb{R}$ (au sens de la définition (3.1.1). On suppose de plus que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

- *X vérifie (LH_2) et $p < 2$.*
- *X vérifie (LH_2) et est continu.*

Alors quand $n \to \infty$, on a :

$$\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} E\left(\left| f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) - f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n)\right|\right) \;\longrightarrow\; 0.$$

Preuve Posons

$$\zeta_i^n := \left| f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) - f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n)\right|.$$

Soit q un réel qu'on choisit égal à 2 si $p < 2$ et $q > p$ sinon pour tout A et T positif, on note :

$$G_T(\omega, \varepsilon, A) \;=\; \sup\left\{|f(\omega, s, x+y) - f(\omega, s, x)|, \quad s \le T;\; |x| \le A;\; |y| \le \varepsilon\right\} \qquad (4.4.3)$$

On a alors

$$|\zeta_i^n| \;\le\; G_t(\varepsilon, A) + |\zeta_i^n| \left[1_{\{|\beta_i^n| > A\}} + 1_{\left\{\left|\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta_i^n\right| \,>\, \varepsilon\right\}} \right]. \qquad (4.4.4)$$

Comme $q > p$, il existe deux fonctions $B \to L_B$ et $B \to H_B$, avec $H_B \to 0$ quand $B \to +\infty$ et telles que

$$|f(\omega, s, x)| \le H_B |x|^q \;+\; L_B.$$

Il suit d'après (4.4.4) que

$$|\zeta_i^n| \;\le\; G_t(\varepsilon, A) + K(1+L_B)\left(1_{\{|\beta_i^n| > A\}} + 1_{\left\{\left|\frac{\Delta X_i^n}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta_i^n\right| > \varepsilon\right\}} \right) + K\left(|\beta_i^n|^q + \left|\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta_i^n\right|^q \right) H_B.$$

Posons $K_B = K(1 + L_B)$ et soit U une variable normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Sous (LH_2) on a clairement

$$\mathbb{E}\left\{ \left|\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta_i^n\right|^q \;+\; |\beta_i^n|^q \right\} \;\le\; K, \quad \forall\, q \in [0, 2].$$

Il suit que :

$$\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\{|\zeta_i^n|\} \leq t\mathbb{E}\{G_t(\varepsilon, A)\} + \frac{K(B)t}{A} + KtH_B$$

$$+ K(B)\, \varepsilon^{-2} \Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\left\{1 \wedge |\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta_i^n|^2\right\}. \qquad (4.4.5)$$

Notons que d'après le lemme 4-1 de [8]

$$K_B\, \varepsilon^{-2} \Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\left\{1 \wedge \left|\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta_i^n\right|^2\right\} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Ensuite, revenant à l'inégalité (4.4.5), on fait tendre successivement $n \to \infty, \varepsilon \to 0,\ A \to \infty$ et $B \to \infty$. $\square$

Preuve du théorème

Posons

$$U_t^n := \Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) - \int_0^t \rho_{\sigma_{s-}}\left(f(s-,.)\right) ds.$$

On a alors :

$$U_t^n = \Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \left[f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) - f\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right)\right] + \qquad (4.4.6)$$

$$+ \Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \left[\, f\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right) - \mathbb{E}\left\{f\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right) | \mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \right\} \right] \qquad (4.4.7)$$

$$+ \Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\left\{f\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right) | \mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\} - \int_0^t \rho_{\sigma_{s-}}\left(f\left(s-,\right)\right) ds. \qquad (4.4.8)$$

Le processus dans (4.4.7) est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{[t/\Delta_n]\Delta_n})_{t\geq 0}$ dont le crochet vérifie :

$$\Delta_n^2 \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \left[\, \mathbb{E}\left\{f^2\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right) | \mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\} - \left(\mathbb{E}\left\{f\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right) | \mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \right\}\right)^2 \right]$$

$$\leq Kt\Delta_n \to 0$$

quand $n \to \infty$ On en déduit par l'inégalité de Doob que (4.4.7) converge u.c.p. vers 0. Le processus dans (4.4.6) converge u.c.p. vers 0 grâce au Lemme 4.4.2 et le processus (4.4.8) converge vers 0 grâce au Lemme 4.4.1.

A ce stade, le théorème 4.1.2 est démontré sous l'hypothèse (LH_2). On passe au cas général par une méthode de "délocalisation" (voir la fin de la preuve du théorème (3.2.1)).

4.4.2 Preuve des théorèmes centraux limites

Préliminaires

Rappelons l'hypothèse (LH_2) introduite dans la preuve du théorème 4.1.2. On va de même renforcer l' hypothèse (M_1).

Hypothèse (LM_1) On a (M_1) et de plus

- les processus $b_s,\ \sigma_s,\ \widetilde{b}_s,\ \int_{\mathbb{R}} \sup_{u\leq s}\left(1 \wedge \widetilde{\delta}(u,x)^2\right) F(dx)$ et $\widetilde{\sigma}_s$ sont uniformément bornés,
- les fonctions $\gamma_k = \gamma$ ne dépendent pas de k. La fonction γ est bornée et vérifie

$$\sup_{s\in\mathbb{R}_+,\ \omega\in\Omega} |\delta(\omega,s,x)| \quad \leq \gamma(x) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \gamma(x)\, F(dx) < \infty.$$

$\square$

Sous l'hypothèse (LM_1), le processus X s'écrit sous la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b''_s ds + \int_0^t \sigma_{s-}\, dW_s + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \delta(s-,x)\, \underline{\mu}(ds,dx), \tag{4.4.9}$$

où $b''_t = b_t - \int_{\mathbb{R}} h(\delta(t-,x))\, F(dx)$, rappelons que $h'(x) = h(x) - x$.

Le processus σ s'écrit quant à lui sous la forme :

$$\sigma_t = \sigma_0 + \int_0^t \widetilde{b}'_s ds + \int_0^t \widetilde{\sigma}_s\, dW_s + \int_0^t v_{s-}\, dV_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\delta}(s-,x) \star (\underline{\mu} - \underline{\nu})(ds,dx) \tag{4.4.10}$$

où $\widetilde{b}'_s = \widetilde{b}_s + \int_{\mathbb{R}} h'\left(\widetilde{\delta}(s-,x)\right) F(dx)$.

On suppose de plus que le processus Γ qui intervient dans la définition 4.1.1 est uniformément borné. Rappelons la variable β_i^n définie dans (4.4.1). Toutes les constantes seront appelées K.

Lemme 4.4.3 *Supposons (LH_2) vérifiée et soit $f\,:\ \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application à croissance $p-$polynomiale et localement équicontinue sur $\mathbb{R}$ (au sens de la définition 3.1.1). On suppose de plus que l'une des conditions suivantes est réalisée :*

- *$p \in [0,1[$,*
- *X continu.*

Alors,

$$\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\left\{ \left| f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \ -\ f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n)\right|^2 \right\} \ \to\ 0$$

quand $n \to \infty$.

La preuve du lemme 4.4.3 est identique à la preuve du lemme 4.4.2, la restriction $p < 1$ est due au fait que si X est une semimartingale discontinue comme c'est le cas ici, $\mathbb{E}\left\{\left|\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right|^q\right\}$ explose si $q > 2$.

Nous allons à présent étudier les conditions de convergence vers 0 des sommes

$$\sqrt{\Delta_n} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\left\{ \left(f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \; - \; f\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right) \right) \mid \mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \right\}. \quad (4.4.11)$$

Nous étudierons séparément le cas continu et le cas discontinu. On trouve des versions de ce lemme dans le cas d'une fonction f deterministe dans la section 8 de [3] si X est continu et dans le lemme 5.5 de [8] si X est discontinu, les démonstrations proposées ici sont largement inspirées de celles qui existent dans ces deux articles et l'étape 1 de la démonstration du lemme 4.4.5 est une reprise de ce qui a été fait dans [8].

Lemme 4.4.4 *Supposons (LM_1) vérifiée et que X soit continu et soit $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application optionnelle. On suppose que la fonction $x \to f(\omega, s, x)$ est paire et dérivable. On suppose de plus que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est localement équicontinue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est à croissance au plus p-polynomiale. Alors*

$$\sqrt{\Delta_n} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\left\{ \left(f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \; - \; f\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right) \right) \mid \mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \right\}$$

converge u.c.p. vers 0 quand $n \to \infty$.

Preuve Posons

$$L_i^n := \; f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \; - \; f\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right). \quad (4.4.12)$$

On a pour une certaine variable aléatoire $\bar{\gamma}_i^n$ entre $\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}$ et β_i^n :

$$L_i^n = L_i'^n \; + \; \left(\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta_i^n\right) \; \frac{\partial f}{\partial x}\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right), \quad (4.4.13)$$

où

$$L_i'^n = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\left((i-1)\Delta_n, \bar{\gamma}_i^n\right) \; - \; \frac{\partial f}{\partial x}\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right)\right)\left(\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta_i^n\right). \quad (4.4.14)$$

Soit $\varepsilon, \; A \; > 0$, et

$$G_t^A \; (\omega, \varepsilon) = \sup_{\{s \le t; \; |y| \le \varepsilon; \; |x| \le A\}} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\omega, s, x+y) \; - \; \frac{\partial f}{\partial x}(\omega, s, x) \right|. \quad (4.4.15)$$

On a :

$$|L_i'^n| \le K \left[G_t^A(\varepsilon) \; + \; \left(1 + |\beta_i^n|^p + \left|\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta_i^n\right|^p\right) \left(\frac{|\beta_i^n|}{A} + \frac{\left|\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta_i^n\right|}{\varepsilon}\right)\right] \left|\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta_i^n\right|.$$

Il n'est pas difficile de voir sous nos hypothèses sur X que

$$\mathbb{E}(|\beta_i^n|^q) \leq K_q, \quad E\left\{\left|\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta_i^n\right|^q\right\} \leq K_q \Delta_n, \quad \forall\, q \geq 2, \tag{4.4.16}$$

on peut également retrouver ce résultat dans (7.37) de [3]. Il en suit par une utilisation répétée de l'inégalité de Hölder que :

$$\sqrt{\Delta_n} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} E\{|L_i'^n|\} \ \leq\ Kt \left[\left(E\left\{ \left(G_t^A(\varepsilon)\right)^2 \right\} \right)^{1/2} \ +\ \frac{\Delta_n^{1/4}}{\varepsilon} \ +\ \frac{1}{A} \right]. \tag{4.4.17}$$

Faisant tendre successivement n vers l'infini, ε vers 0 et A vers l'infini, on voit que

$$\sqrt{\Delta_n} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} E\{|L_i'^n|\} \longrightarrow^{u.c.p} 0 \quad \text{quand} \ \ n \to \infty. \tag{4.4.18}$$

Vu (4.4.14) et (4.4.13), il nous reste à évaluer la quantité

$$\left(\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta_i^n \right) \ \frac{\partial f}{\partial x}\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right).$$

Rappelons que sous (LM_1), σ s'écrit comme dans (4.4.10). On a

$$\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} \ -\ \beta_i^n \ =\ \widetilde{\xi}_i^n \ +\ \widehat{\xi}_i^n, \tag{4.4.19}$$

où

$$\begin{aligned}
\widehat{\xi}_i^n \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \left[\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} (b_s - b_{(i-1)\Delta_n})\, ds + \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \left(\int_{(i-1)\Delta_n}^{s} \widetilde{b'}_u\, du + \int_{(i-1)\Delta_n}^{s} (\widetilde{\sigma}_u - \widetilde{\sigma}_{(i-1)\Delta_n})\, dW_u \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \int_{(i-1)\Delta_n}^{s} (v_u - v_{(i-1)\Delta_n})\, dV_u + \int_{(i-1)\Delta_n}^{s} \int_{\mathbb{R}} (\widetilde{\delta}(u-, x) - \widetilde{\delta}((i-1)\Delta_n, x))\, (\underline{\mu} - \underline{\nu})(du, dx) \right) dW_s \right], \\
\widetilde{\xi}_i^n \quad &= \quad \sqrt{\Delta_n} b_{(i-1)\Delta_n} + \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \left[\ \widetilde{\sigma}_{(i-1)\Delta_n}(W_s - W_{(i-1)\Delta_n}) + v_{(i-1)\Delta_n}(V_s - V_{(i-1)\Delta_n}) \right. \\
&\quad \left. + \int_{(i-1)\Delta_n}^{s} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\delta}((i-1)\Delta_n, x)(\underline{\mu} - \underline{\nu})(du, dx) \right] dW_s.
\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, on va montrer que

$$\mathbb{E}\left\{ \widetilde{\xi}_i^n \frac{\partial f}{\partial x}\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right)\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \right\} \ =\ 0. \tag{4.4.20}$$

Comme l'application $x \to \frac{\partial f}{\partial x}(\omega, s, x)$ est impaire, on a clairement que

$$\mathbb{E}\left\{ b_{(i-1)\Delta_n} \frac{\partial f}{\partial x}\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right)\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \right\} \ =\ 0.$$

Toujours à cause de l'imparité de $\frac{\partial f}{\partial x}$, on a :

$$\mathbb{E}\left\{\widetilde{\sigma}_{(i-1)\Delta_n}\left(\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}(W_s - W_{(i-1)\Delta_n})\,dW_s\right)\frac{\partial f}{\partial x}\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right)\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\} \ = \ 0.$$

Considérons la tribu

$$\mathcal{F}'_{i\Delta_n} \ = \ \sigma\left\{\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}; (W_s - W_{(i-1)\Delta_n})_{(i-1)\Delta_n \le s \le i\Delta_n}\right\}.$$

Vu que W est indépendant de V et de $\underline{\mu}$, on a :

$$\mathbb{E}\left\{\left(\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\left(v_{(i-1)\Delta_n}(V_s - V_{(i-1)\Delta_n}) + \int_{(i-1)\Delta_n}^{s}\int_{\mathbb{R}}\widetilde{\delta}((i-1)\Delta_n, x)(\underline{\mu} - \underline{\nu})(du, dx)\right)\, ds\right)\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial f}{\partial x}\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right)\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\} \ = 0,$$

d'où (4.4.20).

D'après ce qui précède, pour finir la preuve du lemme, il nous reste à montrer que

$$\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\mathbb{E}\left\{\left|\widehat{\xi}_i^n\frac{\partial f}{\partial x}\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right)\right|\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\} \longrightarrow^{u.c.p.} \ 0, \tag{4.4.21}$$

Par les inégalités de Hölder et de Burkholder-Davis-Gundy, on voit que

$$\mathbb{E}\{(\ \widehat{\xi}_i^n\ )^2\} \ \le \ K\left[\Delta_n^3 + \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\left(|b_s - b_{(i-1)\Delta_n}|^2 + |\widetilde{\sigma}_s - \widetilde{\sigma}_{(i-1)\Delta_n}|^2 + |v_s - v_{(i-1)\Delta_n}|^2\right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_{\mathbb{R}}\left|\widetilde{\delta}(s-, x) - \widetilde{\delta}((i-1)\Delta_n, x)\right|^2\ F(dx)\right)\ ds\right].$$

Vu que $\mathbb{E}\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right)\right|^2\right\} \ \le \ K$, et par un usage répété de l'inégalité de Hölder, on a

$$\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\mathbb{E}\left\{\left|\widehat{\xi}_i^n\frac{\partial f}{\partial x}\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right)\right|\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\} \ \le \ Kt\Delta_n$$
$$+ \ Kt^{1/2}\left[\mathbb{E}\left\{\int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n}\left(|b_s - b_{[s/\Delta_n]\Delta_n}|^2 + |\widetilde{\sigma}_s - \widetilde{\sigma}_{[s/\Delta_n]\Delta_n}|^2 + |v_s - v_{[s/\Delta_n]\Delta_n}|^2\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \int_{\mathbb{R}}\left|\widetilde{\delta}(s-, x) - \widetilde{\delta}([s/\Delta_n]\Delta_n, x)\right|^2\ F(dx)\right)\ ds\right\}\right]^{1/2},$$

Par le théorème de Lebesgue et les propriétés de continuité de b, $\widetilde{\sigma}$, v et de $\widetilde{\delta}$ en s, cette dernière quantité tend vers 0 quand $n \to \infty$, d'où (4.4.21). $\square$

Lemme 4.4.5 *Supposons* (LM_1) *vérifiée. Soit* f*, une fonction de* $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, optionnelle et telle que l'application* $x \to f(\omega, s, x)$ *soit paire et dérivable. On suppose que* f *et* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *sont bornées et que* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *est équicontinue en* x*. Alors*

$$\sqrt{\Delta_n} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\left\{ \left(f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} \right) \; - \; f\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n \right) \right) | \mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \right\} \longrightarrow^{u.c.p.} \; 0$$

quand $n \to \infty$*.*

Preuve : Rappelons (4.4.9) et posons

$$Y_t \; := \; Y_0 \; + \; \int_0^t b''_s \, ds \; + \; \int_0^t \sigma_s \, dW_s.$$

Soit maintenant (ε_n) une suite qu'on choisira dans la suite et qui vérifie :

$$\forall \; n, \quad \varepsilon_n \; \in \;]0,1], \quad \text{et} \;\; \varepsilon_n \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

On pose $\mathbb{E}_n \; = \{x \in \mathbb{R}, \; \gamma(x) > \varepsilon_n\}$. Il suit que

$$\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta_i^n \;\; = \;\; \frac{\Delta_i^n Y}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta_i^n \; + \; \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \int_{E_n^c} \delta(s-, x) \, \underline{\mu}(ds, dx).$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \int_{E_n} \delta(s-, x) \, \underline{\mu}(ds, dx).$$

On notera pour la suite :

$$\zeta_i^n(1) \;\; = \;\; \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \int_{E_n} \delta(s-, x) \, \underline{\mu}(ds, dx).$$

$$\zeta_i^n(2) \;\; = \;\; \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \int_{E_n^c} \delta(s-, x) \, \underline{\mu}(ds, dx).$$

Il suit (en utilisant (4.4.12)) que

$$L_i^n := \sum_{j=1}^{3} L_i^n(j) \tag{4.4.22}$$

où

$$L_i^n(1) \;\; = \;\; f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} \right) \; - \; f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} - \zeta_i^n(1) \right),$$

$$L_i^n(2) \;\; = \;\; f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} - \zeta_i^n(1) \right) \; - \; f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n Y}{\sqrt{\Delta_n}} \right),$$

$$L_i^n(3) \;\; = \;\; f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n Y}{\sqrt{\Delta_n}} \right) \; - \; f\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n \right).$$

Etape 1 : Dans cette étape nous voulons estimer

$$\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\mathbb{E}\left\{L_i^n(1)\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}.$$

Vu que f est C^1 en x et que f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont bornées, on a

$$|f(\omega,s,x)-f(\omega,s,x+y)|\ \leq\ K(1\wedge|y|).$$

Il suit que

$$\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\mathbb{E}\left\{|L_i^n(1)|\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}\ \leq\ K\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\mathbb{E}\left\{(1\wedge|\zeta_i^n(1)|)\,|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}$$

Posons

$$\zeta'^n_i(1)=\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\int_{E_n}\gamma(x)\,\underline{\mu}(ds,dx).$$

Pour chaque n fixé, $\zeta'^n_i(1)$ est une variable aléatoire qui s'écrit : $\zeta'^n_i(1)=\sum_{j=1}^N Z_j$ où les Z_j sont des variables indépendantes et identiquement distribuées et vérifient $\mathbb{E}\{Z_1\}=\frac{1}{F(E_n)}\int_{E_n}\frac{\gamma(x)}{\sqrt{\Delta_n}}F(dx)$ et où N est une variable de Poisson de paramètre $\Delta_n F(E_n)$. Il suit que

$$E\{(1\wedge|\zeta_i^n|)\}\ \leq\ \mathbb{P}\{N\geq 1\}\ =\ 1-e^{\Delta_n F(E_n)}\leq\Delta_n F(E_n)\leq K\Delta_n\varepsilon_n^{-1}.$$

On en déduit que

$$\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\mathbb{E}\left\{|L_i^n(1)|\right\}\ \leq\ Kt\Delta_n^{1/2}\varepsilon_n^{-1}.\tag{4.4.23}$$

Etape 2 : Dans cette étape, nous estimons

$$\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\mathbb{E}\left\{L_i^n(2)|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}.$$

Posons :

$$\theta(y)=\int_{\{|\gamma(x)|\leq y\}}|\gamma(x)|\,F(dx),\quad\text{il suit que}\quad\theta(y)\to 0\quad\text{quand}\quad y\to 0,$$

et

$$\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\mathbb{E}\left\{|L_i^n(2)|\right\}\ \leq\ K\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\mathbb{E}\left\{|\zeta_i^n(2)|\right\}\ \leq\ Kt\theta(\varepsilon_n).\tag{4.4.24}$$

Etape 3 : D'après (4.4.22) ainsi que les deux étapes précédentes, en particulier (4.4.23) et (4.4.24), on a

$$\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\left|\mathbb{E}\left\{L_i^n\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}\right|\ \leq\ Kt\left[\Delta_n^{1/2}\varepsilon_n^{-1}+\theta(\varepsilon_n)\right]+\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\left|\mathbb{E}\left\{L_i^n(3)\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}\right|.$$

D'après le lemme 4.4.4, on a

$$\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\left|\mathbb{E}\left\{L_i^n(3)\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}\right| \longrightarrow^{u.c.p.} 0, \quad \text{quand } n\to\infty.$$

Ensuite on choisit $\varepsilon_n = (1\wedge\Delta_n^{1/4})$ et on voit que

$$\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\left|\mathbb{E}\left\{L_i^n\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}\right| \longrightarrow^{u.c.p.} 0, \quad \text{quand } n\to\infty,$$

ce qui termine la preuve. $\Box$

Rappelons le mouvement brownien auxiliaire $\overline{W}$ introduit dans la sous-section 4.2.1.

Lemme 4.4.6 *Supposons (LM_1) vérifée et soit $f\ :\ \Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, une fonction optionnelle, vérifiant l'hypothèse $(K(\mathbb{R}))$ et telle que $x\to f(\omega,s,x)$ soit paire. Alors*

$$\sqrt{\Delta_n}\ \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\left[f\left((i-1)\Delta_n,\beta_i^n\right)\ -\ \mathbb{E}\left\{\left(f\left((i-1)\Delta_n,\beta_i^n\right)\right)|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}\ \right]$$

converge stablement en loi vers le processus

$$\int_0^t\left\{\sqrt{\rho_{\sigma_{s-}}\left(f^2\left(s-,.\right)\right)\ -\ \left(\rho_{\sigma_{s-}}\left(f\left(s-,.\right)\right)\right)^2}\right\}d\overline{W}_s.$$

Preuve Posons

$$\xi_i^n = \sqrt{\Delta_n}\ \left[\ f\left((i-1)\Delta_n,\beta_i^n\right)\ -\ \mathbb{E}\left\{\left(f\left((i-1)\Delta_n,\beta_i^n\right)\right)|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}\ \right].$$

On a clairement

$$E\{\xi_i^n\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\}\ =\ 0. \tag{4.4.25}$$

Ensuite,

$$\mathbb{E}\left\{(\xi_i^n)^2\,|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\} = \Delta_n\left(\rho_{\sigma_{(i-1)\Delta_n}}\left(f((i-1)\Delta_n,.)^2\right)-\rho_{\sigma_{(i-1)\Delta_n}}\left(f((i-1)\Delta_n,.)\right)^2\right).$$

Il suit comme pour le lemme 4.4.1 que

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\mathbb{E}\left\{(\xi_i^n)^2\,|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}\to^{u.c.p.}\int_0^t\left(\rho_{\sigma_{s-}}\left(f(s-,.)^2\right)-\rho_{\sigma_{s-}}\left(f(s-,.)\right)^2\right)ds. \tag{4.4.26}$$

Vu que f est à croissance au plus polynomiale, on a, pour tout $\varepsilon>0$:

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\mathbb{E}\{(\xi_i^n)^2\,1_{\{|\xi_i^n|>\varepsilon\}}|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\}\ \le\ Kt\varepsilon^{-1/2}\Delta_n^{1/4}. \tag{4.4.27}$$

Remarquons que, comme f est paire en x, on a :

$$\mathbb{E}\left\{\xi_i^n \Delta_i^n W \;|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\} \;=\; 0. \tag{4.4.28}$$

Soit N une martingale orthogonale à W. On veut montrer que

$$\mathbb{E}\{\xi_i^n \Delta_i^n N|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\} = 0$$

et pour cela on s'inspire de ce qui a été fait dans la preuve de la proposition 4.1 de [3]. Soit

$$M_t := \mathbb{E}\{\xi_i^n|\mathcal{F}_t\} \quad \text{définie pour} \quad t \geq (i-1)\Delta_n.$$

M est une martingale par rapport à la filtration engendrée par $\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}$ et par le processus $(W_t - W_{(i-1)\Delta_n})_{t\geq(i-1)\Delta_n}$. Par le théorème de représentation des martingales, il existe un processus prévisible (η^n) telle que

$$M_t = M_{(i-1)\Delta_n} + \int_{(i-1)\Delta_n}^t \eta_s^n dW_s.$$

On a alors que $(M_t - M_{(i-1)\Delta_n})(N_t - N_{(i-1)\Delta_n})$ est une martingale (car W et N sont orthogonales), donc

$$\mathbb{E}\{\xi_i^n \Delta_i^n N|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\} = \mathbb{E}\{M_{i\Delta_n} \Delta_i^n N|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\} = \mathbb{E}\{\Delta_i^n M \Delta_i^n N|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\} = 0. \tag{4.4.29}$$

Grâce à (4.4.25), (4.4.26), (4.4.28), (4.4.27) et (4.4.29) les hypothèses du théorème IX-7-28 de [8] sont vérifiées d'où le lemme 4.4.6.

Enonçons un dernier lemme pour terminer cette partie.

Lemme 4.4.7 *Supposons (LM_1) vérifiée et soit f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, optionnelle et telle que :*

- *la fonction $x \rightarrow\ f(\omega, s, x)$ est dérivable,*
- *$\frac{\partial f}{\partial x}$ est localement équicontinue sur $\mathbb{R}$ (au sens de la définition (3.1.1)) et est à croissance p-polynomiale*
- *On suppose également que pour tout $T > 0$, il existe une constante K, des réels $\alpha > \frac{1}{2}$ et $p \geq 0$ tels que :*

$$|f\,(\omega, s, x)\;\; - \;\; f\,(\omega, t, x)\,| \;\;\leq\;\; K|t-s|^\alpha[\;1 + |x|^p\;].$$

Alors

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\left[\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\left\{(f\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right))\,|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\} \;-\; \int_0^t \rho_{\sigma_{s-}}\left(f(s-,.)\right) ds\right] \;\rightarrow^{u.c.p.}\;\; 0 \tag{4.4.30}$$

quand $n \rightarrow \infty$.

Preuve Le côté gauche de (4.4.30) vaut

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \Big[\rho_{\sigma_{(i-1)\Delta_n}}(f((i-1)\Delta_n, .)) - \rho_{\sigma_{s-}}(f(s-,.))\Big]\; ds + \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \int_{[t/\Delta_n]\Delta_n}^t \rho_{\sigma_{s-}}(f(s-,.))\, ds.$$

Vu que f est à croissance au plus polynomiale et que σ est borné, il est évident que

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\int_{[t/\Delta_n]\Delta_n}^{t}|\rho_{\sigma_{s-}}(f(s-,.))|\,ds \;\leq\; K\sqrt{\Delta_n}.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\Big[\rho_{\sigma_{(i-1)\Delta_n}}(f((i-1)\Delta_n,.))-\rho_{\sigma_{s-}}(f(s-,.))\Big]\,ds \;&=\\
\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\Big[\rho_{\sigma_{(i-1)\Delta_n}}(f((i-1)\Delta_n,.))-\rho_{\sigma_{s-}}(f((i-1)\Delta_n,.))\Big]\,ds \;&+\\
\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\big[\rho_{\sigma_{s-}}(f((i-1)\Delta_n,.))-\rho_{\sigma_{s-}}(f(s-,.))\big]\,ds.&
\end{aligned}$$

D'après nos hypothèses sur f, on a clairement que :

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}|\rho_{\sigma_{s-}}(f((i-1)\Delta_n,.))-\rho_{\sigma_{s-}}(f(s-,.))|\,ds\leq Kt\Delta_n^{\alpha-1/2}.$$

Il reste donc à montrer que

$$U_t^n:=\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\Big[\rho_{\sigma_{(i-1)\Delta_n}}(f((i-1)\Delta_n,.))-\rho_{\sigma_{s-}}(f((i-1)\Delta_n,.))\Big]\,ds\;\to^{u.c.p.}\;0.$$

Comme f est C^1, il en est de même de l'application $y\to\rho_y(f(s,.))$. En posant

$$F_{n,i}(\omega,y):=\rho_y(f(\omega,(i-1)\Delta_n,.))\quad\text{et}\quad F'_{n,i}(y)=\frac{\partial\rho_y(f(\omega,(i-1)\Delta_n,.))}{\partial y},$$

on a $U_t^n=-\sum_{j=1}^{3}U_t^n(j)$, où

$$\begin{aligned}
U_t^n(1)\;&=\;\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\left[\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\left(\int_{(i-1)\Delta_n}^{s}\widetilde{b}'_u\,du\right)\,ds\right]F'_{n,i}(\sigma_{(i-1)\Delta_n}),\\
U_t^n(2)\;&=\;\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\left[\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\left(\int_{(i-1)\Delta_n}^{s}\widetilde{\sigma}_{u-}\,dW_u\;+\;\int_{(i-1)\Delta_n}^{s-}v_{u-}\,dV_u\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\int_{(i-1)\Delta_n}^{s-}\int_{\mathbb{R}}\widetilde{\delta}(u-,x)\,(\underline{\mu}-\underline{\nu})(du,dx)\right)\,ds\right]F'_{n,i}(\sigma_{(i-1)\Delta_n}),\\
U_t^n(3)\;&=\;\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\left[\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\big(F_{n,i}(\sigma_{s-})-F_{n,i}(\sigma_{(i-1)\Delta_n})\right.\\
&\qquad\left.-(\sigma_{(i-1)\Delta_n}-\sigma_{s-})F'_{n,i}(\sigma_{(i-1)\Delta_n})\big)\;ds\right].
\end{aligned}$$

Vu que $\widetilde{b}_s$ et $F'_{n,i}(\sigma_s)$ sont bornés, il n'est pas difficile de voir que $|U_t^n(1)| \leq Kt\Delta_n^{1/2}$ d'où $U_t^n(1) \ \rightarrow^{u.c.p} \ 0$.

Le processus $U_t^n(2)$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{[t/\Delta_n]\Delta_n})$ dont l'espérance du crochet en t est plus petit que $Kt\Delta_n$ pour une certaine constante K. On en déduit par l'inégalité de Doob que $U_t^n(2) \ \rightarrow^{u.c.p} \ 0$.

Par ailleurs, par la formule de Taylor,on a

$$U_t^n(3) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \zeta_i^n(s)\, ds,$$

où

$$\zeta_i^n(s) := (\sigma_{s-} - \sigma_{(i-1)\Delta_n})(F'_{n,i}(\sigma_i^n(s)) - F'_{n,i}(\sigma_{(i-1)\Delta_n})) \tag{4.4.31}$$

et où $\sigma_i^n(s)$ est entre $\sigma_{(i-1)\Delta_n}$ et σ_{s-}.

Soit U une variable gaussienne standard. On note par K une borne supérieure pour $|\sigma|$ et par K' une constante assez grande. Soit A et ε, deux réels positifs et arbitraires. On a d'après (4.4.31),

$$|\zeta_i^n(s)| \leq K' \left[\left(\mathbb{P}\left\{ U > \frac{A}{K} \right\} \right)^{1/2} + \frac{|\sigma_{s-} - \sigma_{(i-1)\Delta_n}|}{\varepsilon} + \frac{AG_t(A\varepsilon, KA)}{K} \right] |\sigma_{s-} - \sigma_{(i-1)\Delta_n}|.$$

où on a posé,

$$G_t(\varepsilon, A) = \sup \ \left\{ \ |\frac{\partial f}{\partial x}(\omega, s, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(\omega, s, y)|, \quad s \leq t; \ \ |x|, \ |y| \leq A; \ \ |x - y| \leq \varepsilon \ \right\}.$$

Sous nos hypothèses sur f, on a que $G_t(\varepsilon, A) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$ alors que sous (LM_1) on montre que :

$$\mathbb{E}\{|\sigma_t - \sigma_s|^2\} \leq K'|t - s|.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \mathbb{E}\{|\zeta_i^n(s)|\}\, ds \leq K't \left[\left(\mathbb{P}\left\{ U > \frac{A}{K} \right\} \right)^{1/2} + \frac{\sqrt{\Delta_n}}{\varepsilon} + \frac{AG_t(A\varepsilon, KA)}{K} \right],$$

Faisant tendre n vers l'infini, ε vers 0 et A vers l'infini, on a

$$U_t^n(3) \longrightarrow^{u.c.p.} 0$$

quand $n \to \infty$.

Preuve des Théorèmes 4.2.1 et 4.2.2

Nous prouverons simultanément les deux théorèmes.

$$\left.\begin{array}{l}
\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\left[f\left((i-1)\Delta_n,\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right)\ -\ \mathbb{E}\left\{f((i-1)\Delta_n,\beta_i^n)|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}\ \right]\quad = \\
\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\left(f\left((i-1)\Delta_n,\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right)-f\left((i-1)\Delta_n,\beta_i^n\right)\right. \\
-\ \ \mathbb{E}\left\{\left(\ f\left((i-1)\Delta_n,\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right)-f\left((i-1)\Delta_n,\beta_i^n\right)\right)|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}\ \left.\right) \\
+\ \ \sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\left\{f\left((i-1)\Delta_n,\beta_i^n\right)\ -\ \mathbb{E}\left(f\left((i-1)\Delta_n,\beta_i^n\right)|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right)\ \right\} \\
+\ \ \sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\ \mathbb{E}\left\{\ \left(f\left((i-1)\Delta_n,\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right)\ -\ f\left((i-1)\Delta_n,\beta_i^n\right)\ \right)|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}.
\end{array}\right\} \tag{4.4.32}$$

Notons en premier lieu que

$$\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\left(f\left((i-1)\Delta_n,\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right)-f\left((i-1)\Delta_n,\beta_i^n\right)\ -\right.$$
$$\left.\mathbb{E}\left\{\left(f\left((i-1)\Delta_n,\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right)-f\left((i-1)\Delta_n,\beta_i^n\right)\right)|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}\right)$$

est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{[t/\Delta_n]\Delta_n})_{t\geq 0}$ dont le crochet prévisible est inférieure à

$$\Delta_n\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\mathbb{E}\left\{\ \left[f\left((i-1)\Delta_n,\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right)-f\left((i-1)\Delta_n,\beta_i^n\right)\right]^2|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}$$

et cette dernière quantité converge u.c.p. vers 0 par le Lemme 4.4.3.

D'après le lemme 4.4.6, la suite de processus

$$\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\left\{f\left((i-1)\Delta_n,\beta_i^n\right)\ -\ \mathbb{E}\left(f\left((i-1)\Delta_n,\beta_i^n\right)|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right)\ \right\}$$

converge stablement en loi vers le processus

$$\int_0^t\left\{\sqrt{\rho_{\sigma_{s-}}\left(f\left(s-,.\right)^2\right)\ -\ \left(\rho_{\sigma_{s-}}\left(f\left(s-,.\right)\right)\right)^2}\right\}d\overline{W}_s.$$

D'après les lemmes 4.4.4 et 4.4.5 quand X est continue, respectivement discontinue (et sous les hypothèses du théorème 4.2.1, resp. 4.2.2), on a

$$\sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\mathbb{E}\left\{\ \left(f\left((i-1)\Delta_n,\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right)\ -\ f\left((i-1)\Delta_n,\beta_i^n\right)\ \right)|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}\ \to^{u.c.p.}\ 0.$$

Ce qui montre la partie A des deux théorèmes. La partie B en découle en appliquant le lemme 4.4.7.

On a ainsi démontré les théorèmes sous les hypothèses renforcées. Le passage au cas général se fait par une "délocalisation", comme on l'a fait à la fin de la preuve du théorème 3.2.1.

4.4.3 Preuve des Théorèmes 4.3.3 et 4.3.4

Préliminaires

Comme on l'a fait avec les hypothèses (H_2) ou (LM_1) au début de la section 4.4.2, on renforce l'hypothèse (N_2) de la façon suivante

Hypothèse (LN_2) **:** On suppose (N_2) vérifiée. De plus, les processus b', σ', $\widehat{b}$, $\widehat{\sigma}$, $\widehat{v}$, Z, sont uniformément bornés de même que les processus

$$(\omega,t) \to \int_{\mathbb{R}} \left(\sup_{s\leq t} (1 \wedge ||\widehat{\delta}(\omega,s,x)||^2) \right) F(dx) \ \text{ et } \ (\omega,t) \to \sum_{j=2}^{1+d} \int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge |{\delta'}^j(\omega,t,x)|^2\right) F(dx).$$

Les fonctions (γ_k) ne dépendent pas de k : $\gamma_k = \gamma$ et vérifient

$$|\gamma(x)| \ \leq \ K, \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \gamma(x)\, F(dx) \ < \infty.$$

□

Rappelons que ${\sigma'}^1$ est le premier vecteur ligne du processus σ'. Commençons par un premier lemme qui nous permettra d'estimer la quantité

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \left[\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E} \left\{ f \left(Z_{(i-1)\Delta_n}, \beta_i^n \right) | \mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \right\} \ - \ \int_0^t \rho_{\sigma'^1_{s-}} \left(g \left(Z_s, . \right) \right) \ ds \right],$$

où

$$\beta_i^n = \sum_{j=1}^m {\sigma'}^{1,j}_{(i-1)\Delta_n} \frac{\Delta_i^n W^j}{\sqrt{\Delta_n}}.$$

Lemme 4.4.8 *Supposons (LN_2) vérifiée et soit $g:\ \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$, C^1 et telle que pour tout compact $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}^d$, il existe une constante $K = K(\mathcal{K})$ et un réel positif p vérifiant*

$$\sup_{z\in K} \left\{ \left| \frac{\partial g}{\partial x}(z,x) \right| \ + \ \sum_{j=1}^d \left| \frac{\partial g}{\partial z^j}(z,x) \right| \right\} \ \leq \ K \left[1 \ + \ |x|^p \right]$$

alors

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \left[\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E} \left\{ g \left(Z_{(i-1)\Delta_n}, \beta_i^n \right) | \mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \right\} \ - \ \int_0^t \rho_{\sigma'^1_{s-}} \left(g \left(Z_s, . \right) \right) \ ds \right] \ \longrightarrow^{u.c.p.} \ 0.$$

Preuve : On a

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \left[\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E} \left\{ g \left(Z_{(i-1)\Delta_n}, \beta_i^n \right) | \mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \right\} \ - \ \int_0^t \rho_{\sigma'^1_{s-}} \left(g \left(Z_s, . \right) \right) \ ds \right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\left[\rho_{\sigma'^1_{(i-1)\Delta_n}}(g(Z_{(i-1)\Delta_n},.)) - \rho_{\sigma'^1_s}(g(Z_{(i-1)\Delta_n},.))\right] ds +$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\left[\rho_{\sigma'^1_s}(g(Z_{(i-1)\Delta_n},.)) - \rho_{\sigma'^1_s}(g(Z_s,.))\right] ds.$$

Dans la preuve du lemme 4.4.7, nous avons montré que

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\left[\rho_{\sigma'^1_{(i-1)\Delta_n}}(g(Z_{(i-1)\Delta_n},.)) - \rho_{\sigma'^1_s}(g(Z_{(i-1)\Delta_n},.))\right] ds \rightarrow^{u.c.p.} 0$$

quand $n \to \infty$. Il suffit donc de prouver que ici que

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\left[\rho_{\sigma'^1_s}(g(Z_{(i-1)\Delta_n},.)) - \rho_{\sigma'^1_s}(g(Z_s,.))\right] ds \longrightarrow^{u.c.p.} 0$$

et cela se fait comme on l'a fait pour le terme

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\left[\rho_{\sigma'^1_s}(g(Z_{(i-1)\Delta_n},.)) - \rho_{\sigma'^1_s}(g(Z_s,.))\right] ds$$

dans la preuve du lemme 4.4.7 avec Z jouant le rôle de σ. $\square$

Preuve des théorèmes 4.3.3 et 4.3.4

La preuve de ces théorèmes est juste une conséquence de la partie A des théorèmes 4.2.1 et 4.2.2 et du Lemme 4.4.8, etd'une procédure de "délocalisation".

4.5 Généralisation aux subdivisions non régulières

Comme on l'a fait pour la section 3.5 du chapitre 3, dans cette section, on va étendre les résultats obtenus aux subdivisions non régulières. Les notations et hypothèses concernant les subdivisions sont les mêmes que celles utilisées dans la section 3.2. On rappelle à ce propos que $\left(\pi^n = \{0 = t_0^n, t_1^n, \cdots, t_{i-1}^n, t_i^n, \cdots\}\right)$ est une suite de subdivisions fixée de $\mathbb{R}_+$ dont le pas tend vers 0. Dans toute la section, f désigne une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, X une semimartingale réelle, Z un processus d-dimensionnel enfin g désigne une fonction de $\mathbb{R}^{d+1}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 4.5.1 **A.** *Supposons que f et X vérifient les hypothèses du théorème 4.1.2 alors on a*

$$\sum_{\{i:\ i\geq 1;\ t_i^n \leq t\}} (t_i^n - t_{i-1}^n) f\left(t_{i-1}^n, \frac{X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}}{\sqrt{t_i^n - t_{i-1}^n}}\right) \rightarrow^{u.c.p} \int_0^t \rho_{\sigma_s}(f(s-,.))\, ds. \quad (4.5.1)$$

B. *Si f, X et Z vérifient les hypothèses du théorème 4.3.1, alors,*

$$\sum_{\{i:\ i\geq 1;\ t_i^n\leq t\}} (t_i^n - t_{i-1}^n) g\left(Z_{t_{i-1}^n}, \frac{X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}}{\sqrt{t_i^n - t_{i-1}^n}} \right) \to^{u.c.p} \int_0^t \rho_{\sigma_s}\left(g(Z_{s-}, .)\right) ds. \quad (4.5.2)$$

On peut à présent passer aux théorèmes centraux limites. On rappelle que $\overline{W}$ est un mouvement brownien défini sur une extension de l'espace de départ (voir le début de la section 4.2).

Théorème 4.5.2 *Si f et X vérifient les hypothèses de la partie A du théorème 4.2.1 ou si f et X vérifient les hypothèses de la partie A du théorème 4.2.2, alors, on a :*

$$\sum_{\{i:\ i\geq 1;\ t_i^n\leq t\}} \sqrt{t_i^n - t_{i-1}^n} \left[f\left(t_{i-1}^n, \frac{X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}}{\sqrt{t_i^n - t_{i-1}^n}} \right) - \mathbb{E}\left\{ f\left(t_{i-1}^n, \sigma_{t_{i-1}^n} \frac{W_{t_i^n} - W_{t_i^n}}{\sqrt{t_i^n - t_{i-1}^n}} \right) \middle| \mathcal{F}_{t_{i-1}^n} \right\} \right]$$

converge stablement en loi vers le processus

$$L_t = \int_0^t \sqrt{\rho_{\sigma_{s-}}(f^2(s-, .)) - [\rho_{\sigma_{s-}}(f(s-, .))]^2}\, d\overline{W}_s.$$

Si de plus, il existe un processus Γ localement borné, des réels $\alpha > \frac{1}{2}$ et $p \geq 0$ tels que pour tout $T > 0$ on ait :

$$|f(\omega, s, x) - f(\omega, t, x)| \leq \Gamma_T |t - s|^\alpha [\, 1 + |x|^p \,], \quad \forall\ s,\ t \leq T,$$

alors :

$$\sum_{\{i:\ i\geq 1;\ t_i^n\leq t\}} \left[\frac{(t_i^n - t_{i-1}^n) f\left(t_{i-1}^n, \frac{X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}}{\sqrt{t_i^n - t_{i-1}^n}} \right) - \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \rho_{\sigma_{s-}}\left(f(s-, .)\right) ds}{\sqrt{t_{i-1}^n - t_i^n}} \right]$$

converge stablement en loi vers L.

Théorème 4.5.3 *Supposons que f, X et Z vérifient les hypothèses du théorème 4.3.3 ou les hypothèses du théorème 4.3.4, alors, la suite de processus*

$$\sum_{\{i:\ i\geq 1;\ t_i^n\leq t\}} \left[\frac{(t_i^n - t_{i-1}^n) g\left(Z_{t_{i-1}^n}, \frac{X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}}{\sqrt{t_i^n - t_{i-1}^n}} \right) - \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \rho_{\sigma'^1_{s-}}\left(g(Z_{s-}, .)\right) ds}{\sqrt{t_{i-1}^n - t_i^n}} \right]$$

converge stablement en loi vers le processus

$$L'_t := \int_0^t \sqrt{\rho_{\sigma'^1_{s-}}\left(g(Z_s, .)^2\right) - \rho_{\sigma'^1_{s-}}\left(g(Z_s, .)\right)^2}\, d\overline{W}_s.$$

Les théorèmes énoncés dans cette section se prouvent de façon la même manière que les théorèmes des sections précédentes.

Chapitre 5

Etude de la convergence du produit de deux fonctionnelles de semimartingales

Dans ce chapitre, nous étudions la convergence des processus

$$U_t^n = \Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) g\left(i\Delta_n, \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \tag{5.0.1}$$

où X et Y sont des semimartingales, f et g des fonctions de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et (Δ_n) est une suite qui tend vers 0 quand $n \to \infty$.

5.1 Loi des grands nombres

5.1.1 Hypothèses et Notations

On considère une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$. Soit X et Y deux semimartingales réelles et h, une fonction de troncation sur $\mathbb{R}$. On pose $h'(x) = x - h(x)$.

Rappelons les notations utilisées dans (4.3.1) : pour tout entier $m \geq 1$, on note $h^{(m)}$ et $h'^{(m)}$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}^m$ par

$$h^{(m)} = \begin{pmatrix} h \\ h \\ . \\ . \\ . \\ h \end{pmatrix}, \quad h'^{(m)} = \begin{pmatrix} h' \\ h' \\ . \\ . \\ . \\ h' \end{pmatrix}.$$

On fixe désormais h et sauf mention contraire, on notera ainsi les fonctions de troncation sur $\mathbb{R}^m$ dans tout le chapitre.

Notre première hypothèse n'est rien d'autre qu'une version 2-dimensionnelle de l'hypothèse (H_2) introduite à la section 4.1 du chapitre 4. Pour être plus précis, on a :

Hypothèse (H_4) Le couple (X,Y) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_{s-} dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} h^{(2)}(\delta(s,x))\,(\mu-\nu)(ds,dx) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h'^{(2)}(\delta(s,x))\mu(ds,dx)\end{aligned}$$

où

- b est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, prévisible, localement borné. σ est un processus càdlàg, adapté, prenant ses valeurs dans l'espace des matrices de dimension $2 \times m$.
- W est un mouvement brownien de dimension m. $\underline{\mu}$ est une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.
- $\underline{\nu}$ est la mesure compensatrice $\underline{\mu}$, elle s'écrit : $\underline{\nu}(ds,dx) = F(dx)ds$ où F est une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}$.
- $\delta : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est une application prévisible telle que le processus $\int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge ||\delta(s,x)||^2\right) F(dx)$ soit localement borné.

$\square$

Si (H_4) est vérifié, on désigne par $\sigma^i,\ i=1,2$ la i ième ligne de la matrice σ.

Définition 5.1.1 *Soit m un entier non nul. Soit m vecteur aléatoire V de dimension m, suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, Id(m))$ où $Id(m)$ est la matrice identité d'ordre m, on notera ρ sa distribution sur $\mathbb{R}^m$. Pour tout vecteur ligne y de dimension m et toute application borélienne $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on notera :*

$$\rho(\phi(y.)) := \mathbb{E}(\phi(yV)) = \int_{\mathbb{R}^m} \phi(yx)\,\rho(dx), \tag{5.1.1}$$

où yx est le produit de la matrice y avec la matrice x. Notons que ρ dépend de m.

Soit g une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour A , $t \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, on définit :

$$G_t^g(\varepsilon, A) = \sup \{ \ |g(s,x+y) - g(s,x)|, \quad |x| \leq A;\ |y| \leq \varepsilon;\ s \leq t \ \} \tag{5.1.2}$$

et

$$K_t^h(\varepsilon, A) = \sup \{ \ |g(s+\varepsilon,x) - g(s,x)|, \quad |x| \leq A;\ 0 \leq s < t \ \}. \tag{5.1.3}$$

Sous (H_4), on pose :

$$\beta_i^n \ := \sum_{j=1}^m \sigma_{(i-1)\Delta_n}^{1,j} \frac{\Delta_i^n W^j}{\sqrt{\Delta_n}}, \quad \text{et} \quad \beta'^n_i \ := \ \sum_{j=1}^m \sigma_{(i-1)\Delta_n}^{2,j} \frac{\Delta_{i+1}^n W^j}{\sqrt{\Delta_n}}. \tag{5.1.4}$$

5.1.2 Résultats

On rappelle l'hypothèse $(K(\mathbb{R}))$ introduit à la section (3.1) du chapitre 3.

Théorème 5.1.2 *Supposons (H_4) vérifiée et soit f et g deux fonctions optionnelles et à croissance respectivement p et p' polynomiale. On suppose que l'une des conditions suivantes est satisfaite*

- $p,\ p' \in [0, 2[$,
- X *continu et* $p' \in [0, 2[$,
- Y *continu et* $p \in [0, 2[$,
- X *et* Y *sont continues.*

On suppose de plus que f et g vérifient $K(\mathbb{R})$ et que

$$\mathbb{E}\Big\{G_t^f(\varepsilon, A)\} \ + \ G_t^g(\varepsilon, A)\Big\} \ \longrightarrow \ 0 \quad \textit{quand } \varepsilon \to \ 0, \quad \forall\ A, \quad t \geq 0.$$

Alors, la suite de processus

$$U_t'^n \ = \ \Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \Big[f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) g\left(i\Delta_n, \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right)$$

$$-f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n) \left(g\left((i-1)\Delta_n, \beta_i'^n\right) - g\left(i\Delta_n, \beta_i'^n\right)\right)\Big].$$

converge u.c.p. vers le processus

$$U_t \ := \ \int_0^t \rho(f(s-, \sigma_{s-}^1.))\rho(g(s-, \sigma_{s-}^2.))\, ds \tag{5.1.5}$$

quand $n \to \infty$.

Si de plus,

$$\mathbb{E}\left\{K^g(\Delta_n, A)_t\right\} \ \longrightarrow \ 0 \quad \forall\ A,\ t \ \geq \ 0, \tag{5.1.6}$$

quand $n \to \infty$, alors les processus U^n définies dans (5.0.1) vérifient

$$U^n \ \longrightarrow^{u.c.p.} \ U.$$

Dans le corollaire suivant, on donne une autre version du théorème précédent avec des hypothèses certes plus fortes mais qui ont l'avantage de simplifier l'énoncé.

Corollaire 5.1.3 *On suppose que H_4 est vérifiée et que f et g sont optionnelles et à croissance respectivement p et p' polynomiale. On suppose également que l'une des hypothèses suivantes soit réalisée :*

- $p,\ p' \in [0, 2[$,
- X *continu et* $p' \in [0, 2[$,
- Y *continu et* $p \in [0, 2[$,
- X *et* Y *sont continus.*

On suppose de plus que f est localement équicontinue sur $\mathbb{R}$ (au sens de la définition 3.1.1) et qu'elle admet des limites à gauche en s et que l'application $(s, x) \to g(\omega, s, x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Alors,

$$U^n \ \longrightarrow^{u.c.p.} \ U$$

5.1.3 Etude de la Convergence avec une fonction auxiliaire

L'hypothèse (5.1.6) du théorème (5.1.2) étant trés restrictive du point de vue pratique, on se propose comme on l'a déjà fait dans les chapitres antérieurs d'étudier le cas particulier où la fonction g s'écrit sous la forme :

$$g(\omega, s, x) \;=\; g'(Z(\omega), x),$$

où g' est une fonction définie sur $\mathbb{R}^{d+1}$ pour $d \in \mathbb{N}$ et où Z et un processus d-dimensionnel.

Le premier résultat (du type loi des grands nombres) n'est rien d'autre qu'une application du théorème 5.1.2. Pour l'énoncer nous avons besoin de supposer que Z comme X et Y soit une semimartingale d'Itô ; pour être plus précis, on suppose :

Hypothèse (N_3) **:** Le triplet (X, Y, Z) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \\ Z_t \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} Z_0 \\ X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \int_0^t b'_s ds + \int_0^t \sigma'_{s-}\, dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d+2}} h^{(d+2)}(\delta'(s,x))\,(\underline{\mu} - \underline{\nu})(ds, dx)$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d+2}} h'^{(d+2)}(\delta'(s,x))\,\underline{\mu}(ds, dx),$$

où

- b' est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+2}$, prévisible, localement borné .
- W est un mouvement brownien m-dimensionnel.
- σ' est un processus càdlàg, adapté, prenant ces valeurs dans l'espace des matrices de dimensions $(d+2) \times m$
- δ' : $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d+2}$, est une application prévisible telle que le processus $\int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge ||\delta(s,x)||^2\right) F(dx)$ soit localement borné.

$\square$

Sous (N_3), on notera par σ'^i la $i$ème ligne de la matrice σ'.

Théorème 5.1.4 *Supposons que le triplet (X, Y, Z) vérifie (N_3) et soit $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application optionnelle et localement équicontinue (au sens de la définition 3.1.1). Soit $g : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est à croissance p polynomiale et que pour tout pour tout compact $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}^d$, il existe une constante $C_{\mathcal{K}}$, un réel positif p' tels que*

$$\sup_{z \in \mathcal{K}} |g(z,x)| \;\leq\; C_{\mathcal{K}}[1 + |x|^{p'}].$$

On suppose de plus que l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- *p, $p' \in [0, 2[$,*
- *X continu et $p' \in [0, 2[$,*
- *Y continu et $p \in [0, 2[$,*
- *X et Y sont continues,*

Alors

$$\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) g\left(Z_{i\Delta_n}, \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \longrightarrow^{u.c.p.} \int_0^t \rho(f(s-,\sigma'^1_{s-}.))\rho\left(g(Z_s,\sigma'^2_s.)\right) ds,$$

quand $n \to \infty$.

5.2 Théorèmes centraux limite

Dans cette partie, on cherche un théorème central limite associé au théorème 5.1.2.

Pour être plus précis, on étudie les conditions sous lesquelles la suite de processus :

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\left[\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) g\left(i\Delta_n, \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right) - \int_0^t \rho(f(s-,\sigma^1_{s-}.))\rho(g(s-,\sigma^2_{s-}.))ds\right]$$

converge.

5.2.1 Hypothèses et Notations

Commençons par les hypothèses sur notre couple de semimartingales (X,Y). L'hypothèse suivante n'est rien d'autre qu'une version 2-dimensionnelle de l'hypothèse (H_3) introduite à la section 4.2 du chapitre 4.

Hypothèse (H_5) Le couple (X,Y) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_{s-} dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} h^{(2)}(\delta(s-,x))\,(\underline{\mu}-\underline{\nu})(ds,dx) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h'^{(2)}(\delta(s-,x))\underline{\mu}(ds,dx),$$

où

- b est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, càdlàg adapté,
- σ est un processus localement borné càdlàg adapté et à valeur dans l'espace des matrices de dimension $2 \times m$.
- $\delta\ : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est làg en s, $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{R}$-mesurable (en (ω,x)) pour tout s fixé, de plus il existe une suite de temps d'arrêts (T_k) croissant vers l'infini et une suite de fonctions (γ_k) définies sur $\mathbb{R}$, boréliennes telles que pour tout k, on ait

$$\sup_{s\leq T_k(\omega),\ \omega\in\Omega} ||\delta(\omega,s,x)|| \ \leq\ \gamma_k(x), \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} (\gamma_k(x)\wedge 1)\ F(dx)\ < \infty. \qquad (5.2.1)$$

□

L'hypothèse qui va suivre est du même type que l'hypothèse (M_1) de la section 4.2 du chapitre 4. Elle porte sur le processus σ.

Hypothèse (M_3) On a (H_5) et de plus, le processus σ peut s'écrire sous la forme

$$\sigma_t \;=\; \sigma_0 + \int_0^t \widetilde{b}_s ds + \int_0^t \widetilde{\sigma}_{s-} dW_s + \int_0^t v_{s-} dV_s + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t h^{(2m)}(\widetilde{\delta}(s,x))(\underline{\mu} - \underline{\nu})(ds,dx)$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} \int_0^t h'^{(2m)}(\widetilde{\delta}(s-,x))\underline{\mu}(ds,dx),$$

où
- $\widetilde{b}$ est un processus prévisible, de dimension $\mathbb{R}^{2\times m}$
- $\widetilde{\sigma}$ un processus càdlàg, adapté, prenant ces valeurs dans l'espace des tableaux de dimensions $2 \times m \times m$,
- V est un mouvement brownien l-dimensionnel indépendant de W,
- v est un processus càdlàg, adapté prenant ses valeurs dans l'espace des tableaux de dimensions $2 \times m \times l$,
- $\widetilde{\delta}$ est une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{2\times m}$ telle que pour s, l'application $(\omega, x) \to \widetilde{\delta}(\omega, s, x)$ soit $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{R}$-mesurable. On suppose de plus que $\widetilde{\delta}$ est càdlàg en s et le processus $\int_{\mathbb{R}} \left[\sup_{s\le t} \left(1 \wedge ||\widetilde{\delta}(s,x)||^2\right)\right] F(dx)$ est localement borné.

□

Passons à présent aux hypothèses sur les fonctions. Considérons $\theta:\ \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Hypothèse $F(q)$ **:** On dira que θ vérifie $(F(q))$, s'il existe un processus localement borné Γ et un réel $\alpha > \frac{1}{2}$ tels que

$$|\theta(\omega,s,x) - \theta(\omega,t,x)| \;\le\; \Gamma_T[1+|x|^q]\,|t-s|^\alpha, \quad \forall\, T>0,\ \ s,\ t\ \in\ [0,T],\ \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{5.2.2}$$

□

Hypothèse (Dif) On dira que θ vérifie (Dif), si :
- $\theta(\omega, s, 0)$ est un processus localement borné,
- l'application $x \to \theta(\omega, s, x)$ est C^1,
- $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ est à croissance au plus polynomiale et est localement équicontinue sur $\mathbb{R}$. □

Hypothèse (Dif') On dira que θ vérifie (Dif') si elle vérifie (Dif) et s'il existe un processus γ localement borné tel que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ |\theta(\omega,s,x)| \;+\; \left|\frac{\partial\theta}{\partial x}(\omega,s,x)\right|.\right\} \;\le\; \gamma_s(\omega),$$

où $\frac{\partial^0\theta}{\partial x^0} = \theta$. □

Soit $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ un espace auxiliaire muni d'un mouvement brownien $\overline{W}$. On pose

$$\widetilde{\Omega} = \Omega \times \Omega', \quad \widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', \quad \widetilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}'$$

Les processus définis sur Ω où Ω' peuvent être considérés comme définis sur $\widetilde{\Omega}$. On définit sur $\widetilde{\mathcal{F}}$ la filtration $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)$ qui est la plus petite filtration continue à droite, contenant $\mathcal{F}_t$ et telle que $\overline{W}$ soit adapté.

Posons :

$$\left.\begin{array}{rcl} V_t^n & = & \sqrt{\Delta_n}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\Big[f\left((i-1)\Delta_n,\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right)g\left((i-1)\Delta_n,\frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \\ & & -\mathbb{E}\left\{f((i-1)\Delta_n,\beta_i^n)g((i-1)\Delta_n,\beta'^n_i)\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}\Big], \\ V'^n_t & = & \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\Big[\Delta_n f\left((i-1)\Delta_n,\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right)g\left(i\Delta_n,\frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \\ & & -\ \int_0^t\rho(f(s-,\sigma_{s-}^1.))\rho(g(s-,\sigma_{s-}^2.))\,ds\Big], \end{array}\right\} \tag{5.2.3}$$

Rappelons les notations (5.1.1). Pour tout $j\in\{1,\cdots,m\}$, On définit la projection P_j par

$$P_j(y)=y^j,\quad \forall\ y\in\mathbb{R}^m. \tag{5.2.4}$$

On définit le processus $A(1)$ unidimensionnel et le processus $A(2)$ qui est un vecteur ligne de dimension m de la façon suivante

$$\left.\begin{array}{rcl} A(1)_s & = & \rho\left(f(s-,\sigma_{s-}^1.)^2\right)\rho\left(g(s-,\sigma_{s-}^2.)^2\right) \\ & & +\ 2\rho\left(g(s-,\sigma_{s-}^2.)\right)\rho\left(f(s-,\sigma_{s-}^1.)\right)\rho\left(f(s-,\sigma_{s-}^1.)g(s-,\sigma_{s-}^2.)\right) \\ & & -\ 3\left(\rho\left(f(s-,\sigma_{s-}^1.)\right)\right)^2\left(\rho\left(g(s-,\sigma_{s-}^2.)\right)\right)^2, \\ A(2)_s^j & = & \rho\left(f(s-,\sigma_{s-}^1.)\right)\rho\left(g(s-,\sigma_{s-}^2.)P_j(.)\right)+\rho\left(g(s-,\sigma_{s-}^2.)\right)\rho\left(f(s-,\sigma_{s-}^1.)P_j(.)\right). \end{array}\right\} \tag{5.2.5}$$

On définit à présent les processus $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ de la façon suivante :

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_t & = & \int_0^t\sqrt{A(1)_s}\,d\overline{W}_s \\ \mathcal{M}'_t & = & \sum_{j=1}^m\int_0^t A(2)_s^j\,dW_s^j+\int_0^t\sqrt{A(1)_s-||A(2)_s||^2}\,d\overline{W}_s. \end{array}\right\} \tag{5.2.6}$$

Remarque 5.2.1 *Remarquons que si les applications $x\to f(s,x)$ et $x\to g(s,x)$ sont paires, on a $A(2)_s^j=0$, d'où $\mathcal{M}=\mathcal{M}'$.*

Sous l'hypothèse (H_5), on pose :

$$\widehat{b}_s^1\ =\ b^1-\int_{\mathbb{R}}h(\delta^1(s-,x))\,F(dx),$$

et

$$\widehat{b}_s^2\ =\ b^2-\int_{\mathbb{R}}h(\delta^2(s-,x))\,F(dx).$$

Notons que si X est continue $\widehat{b}^1\ =\ b^1$.

On rappelle le processus $\widetilde{\sigma}$ introduit dans l'hypothèse (M_3).

Théorème 5.2.2 **A.** *Supposons que l'hypothèse (M_3) soit vérifiée. Soit f et g, deux fonctions de $\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, optionnelles, vérifiant $(K(\mathbb{R}))$. On suppose que l'une des conditions suivantes est réalisée :*

- X et Y sont continus, f et g vérifient l'hypothèse (Dif).
- X continu, f vérifie (Dif) et g vérifie (Dif').
- Y continu, f vérifie (Dif') et g vérifie (Dif).
- f et g vérifient (Dif').

Alors, quand n tend vers l'infini, la suite de processus V_t^n converge stablement en loi vers le processus $\mathcal{M}_t$ dans les cas suivants :

A.1. *Les applications $x \to f(\omega, s, x)$ et $x \to g(\omega, s, x)$ sont paires,*

A.2. *l'application $x \to f(\omega, s, x)$ est paire et $\widehat{b}^2 = \widetilde{\sigma}^{2,j,k} \equiv 0$ pour $j, k \in \{1, \cdots, m\}$*

A.3. $\widehat{b}^1 = \widetilde{\sigma}^{1,j,k} = \widetilde{\sigma}^{2,j,k} \equiv 0$, *l'application $x \to g(\omega, s, x)$ est paire pour $j, k \in \{1, \cdots, m\}$.*

A.4. *On a $\widehat{b}^1 = \widehat{b}^2 = \widetilde{\sigma}^{1,j,k} = \widetilde{\sigma}^{2,j,k} \equiv 0$ pour $j, k \in \{1, \cdots, m\}$.*

A.5. *g impaire et $\widehat{b}^2 = \widetilde{\sigma}^{2,j,k} \equiv 0$ pour $j, k \in \{1, \cdots, m\}$.*

B. *Suppososons de plus que f et g vérifient respectivement $(F(q))$ et $(F(q'))$ où q (resp. q') est un réel positif quelconque si X (resp. Y est continue) et q (resp. q') appartient à $[0, 2]$ sinon. Alors, la suite de processus ${V'}_t^n$ converge stablement en loi vers le processus $\mathcal{M}'_t$.*

Remarque 5.2.3 *Dans les parties A.1, A.2 et A.3 du théorème précèdent on a généralisé les résultats de la partie A.1 et les résultats du théorème 4.2.1 aux cas des fonctions non paires. Cette généralisation ne s'est pas faite sans restriction sur les processus. Prenons l'exemple où $g \equiv 1$ les hypothèses du théorème sont vérifiées dans le cas où la fonction f n'est pas paire ce qui impose le fait que $\widehat{b}^1 = \widetilde{\sigma}^{1,k,j} \equiv 0$. Dans ce cas, le processus X s'écrit*

$$X_t \;=\; X_0 + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \sigma_s^{1,j}\, dW_s^j + \sum_{0 \le s \le t} \Delta X_s.$$

On a dans ce cas

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \left[f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} \right) \;-\; \int_0^t \rho\left(f(s-, \sigma_{s-}^1 .) \right) ds \right] \;\longrightarrow\; \mathcal{M}''$$

stablement en loi, avec

$$\begin{aligned} \mathcal{M}''_t \;=\; & \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \rho\left(f(s-, \sigma_{s-}^1 .) P_j(.) \right) dW_s^j \;+ \\ & + \int_0^t \sqrt{\rho\left(f(s-, \sigma_{s-}^2 .)^2 \right) - \left(\rho\left(f(s-, \sigma_{s-}^1 .) \right) \right)^2 - \sum_{j=1}^{m} \left(\rho\left(f(s-, \sigma_{s-}^1 .) P_j(.) \right) \right)^2 }\; d\overline{W}s, \end{aligned}$$

voir (5.2.4) pour P.

5.2.2 Convergence pour le produit de deux fonctions auxiliaires

Dans cette partie, on étudie le cas particulier des fonctions qui s'écrivent sous la forme $f(\omega, s, x) = f'(Z_s(\omega), x)$ et $g(\omega, s, x) = g'(Z'_s(\omega), x)$ où Z et Z' sont des semimartingales respectivement d et d'-dimensionnelle et où f' et g' sont définies sur $\mathbb{R}^{d+1}$ et $\mathbb{R}^{d'+1}$. Nous commençons par faire quelques hypothèses et notations.

Hypothèse (N_4) Le quadruplet (X, Y, Z, Z') admet une écriture sous la forme :

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \\ Z_t \\ Z'_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ Z'_0 \end{pmatrix} + \int_0^t b'_s ds + \int_0^t \sigma'_s \, dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d+2}} h^{(2+d+d')}(\delta'(s-,x)) \, (\underline{\mu} - \underline{\nu})(ds, dx)$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d+2}} h^{'(2+d+d')}(\delta'(s-,x)) \, \underline{\mu}(ds, dx), \tag{5.2.7}$$

où σ est un processus progressivement mesurable, localement borné, à valeur dans l'espace des matrices de dimension $(2 + d + d') \times m$ et tel que

$$\begin{pmatrix} \sigma_t^{'1,1}, \cdots, \sigma_t^{'1,m} \\ \sigma_t^{'2,1}, \cdots, \sigma_t^{'2,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0^{'1,1}, \cdots, \sigma_0^{'1,m} \\ \sigma_0^{'2,1}, \cdots, \sigma_0^{'2,m} \end{pmatrix} + \int_0^t \widetilde{b}_s ds + \int_0^t \widetilde{\sigma}_{s-} dW_s + \int_0^t v_{s-} dV_s$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} \int_0^t h^{(2m)}(\widetilde{\delta}(s,x)) \, (\underline{\mu} - \underline{\nu})(ds, dx) + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t h^{'(2m)}(\widetilde{\delta}(s,x)) \underline{\mu}(ds, dx), \tag{5.2.8}$$

où

- b' et $\widetilde{b}$ sont des processus prévisibles, localement bornés, à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^{2+d+d'}$ et $\mathbb{R}^{2\times m}$, de plus les processus $b^{'1}$ et $b^{'2}$ sont càglàd.
- W et V sont des mouvement browniens indépendants, de dimension respectivement m et l.
- $\widetilde{\sigma}$ et v sont des processus càdlàg, adaptés, prenant leurs valeurs respectivement dans l'espace des tableaux de dimensions $2 \times m \times m$ et $2 \times m \times l$.
- $\delta' : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2+d+d'}$ et $\widetilde{\delta} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times m}$, sont prévisibles, les processus

$$\int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge ||\delta^{'j}(s,x)||^2\right) F(dx), \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \left[\sup_{u \le s} \left(1 \wedge ||\widetilde{\delta}^{k_1,k_2}(s,x)||^2\right)\right] F(dx)$$

sont localement bornés, où $j \in \{3, \cdots, d+2\}$ et où $k_1 \in \{1, 2\}$ et $k_2 \in \{1, \cdots, m\}$. On suppose de plus que $\widetilde{\delta}$ est càdlàg en s alors que $\delta^{'1}$ et $\delta^{'2}$ admettent des limites à gauche en s. Enfin, on suppose l'existence d'une suite de temps d'arrêt (T_k) qui croissent vers l'infini et une suite de fonctions boréliennes (γ_k) et (ϕ_k) telle que pour tout k, on ait

$$\left.\begin{array}{l} \sup_{s \le T_k(\omega)} \left\{\left|\delta'^1(\omega,s,x)\right| + \left|\delta'^2(\omega,s,x)\right|\right\} \le \gamma_k(x), \\ \sup_{s \le T_k(\omega)} \left\{\sum_{j=3+d}^{2+d+d'} |\delta'^j(\omega,s,x)|\right\} \le \phi_k(x) \\ \int_{\mathbb{R}} \left[(1 \wedge \gamma_k(x)) + \left(1 \wedge \phi_k^2(x)\right)\right] F(dx) < \infty. \end{array}\right\} \tag{5.2.9}$$

Sous (N_4), on désignera par σ^j, la j ième ligne de la matrice σ. On va introduire les versions actuelles des hypothèses (Dif) et (Dif') de la section 5.2. Soit ψ, une fonction de $\mathbb{R}^{q+1} \to \mathbb{R}$, où $q \in \mathbb{N}^\star$.

Hypothèse (Diff-q) : On dira que ψ vérifie (Diff-q), si ψ est C^1 sur $\mathbb{R}^{q+1}$ et si pour tout compact $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^q$, il existe une constante $C_\mathcal{K}$ et un réel p positif $p = p(\mathcal{K})$ tels que

$$\left.\begin{array}{lcl} \sup_{z\in\mathcal{K}} \quad \{|\psi(z,x)|\} & \leq & C_\mathcal{K}, \\ \sup_{z\in\mathcal{K}} \quad \left\{\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}(z,x)\right| + \sum_{j=1}^q \left|\frac{\partial\psi}{\partial z^j}(z,x)\right|\right\} & \leq & C_\mathcal{K}[1+|x|^p]. \end{array}\right\} \qquad (5.2.10)$$

□

Hypothèse (Diff'-q) : On dira que ψ vérifie (Diff'-q), si ψ vérifie (Diff-q) et si le réel p qui intervient dans (5.2.10) est nul. □

Pour toute la suite de ce paragraphe, on utilisera des fonctions

$$f:\ \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R} \quad \text{et } g:\ \mathbb{R}^{d'+1} \to \mathbb{R}.$$

Si elles sont suffisamment régulières, on posera

$$\begin{array}{lcl} U_t^n & = & \frac{1}{\Delta_n}\left[\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) g\left(Z'_{i\Delta_n}, \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right)\right. \\ & & \left. -\ \int_0^t \rho(f(Z_s, \sigma_s'^1 .))\rho(g(Z'_s, \sigma_s'^2 .))\, ds\right]. \end{array} \qquad (5.2.11)$$

Rappelons :
- le mouvement brownien $\overline{W}$ définit sur un espace auxiliaire et introduit au début du paragraphe 5.2.1,
- la projection définie dans (5.2.4).

On rappelle également les processus $A(1),\ A(2),\ \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ définis en (5.2.5) et (5.2.6). On donne ici leurs versions actuelles :

$$\begin{array}{lcl} \Pi(1)_s & = & \rho\left(f(Z_s, \sigma_s'^1 .)^2\right)\rho\left(g(Z'_s, \sigma_s'^2 .)^2\right) \\ & & +\ 2\rho(f(Z_s, \sigma_s'^1 .))\rho(g(Z'_s, \sigma_s'^2 .))\rho\left(f(Z_s, \sigma'^1 .)g(Z'_s, \sigma_s'^2 .)\right) \\ & & -\ 3\left(\rho(f(Z_s, \sigma_s'^1 .))\right)^2\left(\rho(g(Z'_s, \sigma_s'^2 .))\right)^2, \\ \Pi(2)_s^j & = & \rho(f(Z_s, \sigma_s'^1 .))\rho\left(g(Z'_s, \sigma_s'^2 .)P_j(.)\right) + \rho\left(f(Z_s, \sigma_s'^1 .)P_j(.)\right)\rho(g(Z'_s \sigma_s'^2 .)). \end{array}$$

en posant $\Pi(2)$ le vecteur ligne $(\Pi(2)^1, \cdots, \Pi(2)^m)$,

$$\left.\begin{array}{lcl} \mathcal{T}_t & = & \int_0^t \sqrt{\Pi(1)_s}\, d\overline{W}_s, \\ \mathcal{T}'_t & = & \sum_{j=1}^{m'} \int_0^t \Pi(2)_s^j\, dW_s'^j \ +\ \int_0^t \sqrt{\Pi(1)_s \ -\ ||\Pi(2)_s||^2}\, d\overline{W}_s. \end{array}\right\} \qquad (5.2.12)$$

Rappelons enfin les processus $\widetilde{\sigma}$ et a qui interviennent dans l'hypothèse (N_4) et posons pour $r,\ r' \leq 1$:

$$\widehat{b'}^1 \ = \ b'^1 - \int_\mathbb{R} h(\delta'^1(s-,x))\, F(dx).$$

et

$$\widehat{b'}^2 \;=\; a^2 - \int_{\mathbb{R}} h(\delta'^2(s-,x))\, F(dx).$$

Théorème 5.2.4 *Supposons l'hypothèse* (N_4) *vérifiée et que pour tout compact* $\mathcal{K}$ *de* $\mathbb{R}^d$*, il existe une constante* $C_{\mathcal{K}}$ *telle que :*

$$\sup_{z\in\mathcal{K}} \{|f(z,x)|\} \;\leq\; C_{\mathcal{K}}. \tag{5.2.13}$$

On suppose de plus que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée

- X *et* Y *sont continus,* f *vérifie (Diff-d) et* g *vérifie (Diff-d').*
- X *continu,* f *vérifie (Diff-d) et* g *vérifie (Diff'-d').*
- Y *continu,* f *vérifie (Diff'-d) et* g *vérifie (Diff-d).*
- f *vérifie (Diff'-d) et* g *vérifient (Diff'-d').*

Alors, U^n *converge stablement en loi vers le processus* $\mathcal{T}'$ *quand* n *tend vers l'infini dans les cas suivants*

A.1. *Les application* $x \to f(\omega,s,x)$ *et* $x \to g(\omega,s,x)$ *sont paires.*

A.2. *L'application* $x \to f(\omega,s,x)$ *est paire et* $\widehat{b'}^2 = \widetilde{\sigma}^{2,j,k} \equiv 0, \quad \forall\, j,k \in \{1,\cdots,m\}$.

A.3. *L'application* $x \to g(\omega,s,x)$ *est paire et* $\widehat{b'}^1 = \widetilde{\sigma}^{1,j,k} = \widetilde{\sigma}^{2,j,k} = \sigma^{j',k'} \equiv 0$*, pour* $j,k,k' \in \{1,\cdots,m\}$ *et* $j' \in \{3+d,\cdots,d+d'+2\}$.

A.4. *On a* $\widehat{b'}^1 = \widehat{b'}^2 = \widetilde{\sigma}^{1,j,k} = \widetilde{\sigma}^{2,j,k} = \sigma^{j',k'} \equiv 0, \ \forall\, j,k,k' \in \{1,\cdots,m\}$ *et* $j' \in \{3+d,\cdots,d+d'+2\}$ *et* $k' \in \{1,\cdot,m\}$

A.5. g *impaire et* $\widehat{b'}^2 = \widetilde{\sigma}^{2,j,k} \equiv 0$ *pour* $j,k \in \{1,\cdots,m\}$.

Remarque 5.2.5 *La condition* $\sigma'^{q,k} \equiv 0$ *pour* $q \in \{3+d,\cdots,2+d+d'\}$ *et* $k \in \{1,\cdots,m\}$ *veut dire en fait que la semimartingale* Z' *n'a pas de partie martingale continue.*

5.3 Preuves

5.3.1 Preuve de la loi des grands nombres

Préliminaires

Comme on l'a déjà fait plusieurs fois dans les chapitres précédents, on renforce l'hypothèse (H_4) de la façon suivante :

Hypothèse LH_4 **:** (H_4) est vérifiée, de plus les processus b_s, σ_s, $\int_{\mathbb{R}^2}(1\wedge|x|^2)\,F_s(dx)$ et ΔX_s et ΔY_s sont uniformément bornés. $\square$

On supposera également pour le moment que tout les processus à croissance polynomiale le sont pour un processus Γ borné (voir la définition 4.1.1 partie A du chapitre 4 pour Γ).

Toutes les contantes seront appelées par K. f et g sont des fonctions de $\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, optionnelles.

On commencera la preuve par quelques lemmes. Rappelons β_i^n et β'^n_i définies dans (5.1.4).

Lemme 5.3.1 *Spuposons (LH_4) vérifiée, que f et g vérifient $(K(\mathbb{R}))$ et sont à croissance polynomiale alors*

$$\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} E\left\{f\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right) g\left((i-1)\Delta_n, \beta_i'^n\right) \ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}$$

converge u.c.p. vers le processus

$$\int_0^t \rho\left(f(s-, \sigma_{s-}^1.)\right) \rho\left(g(s-, \sigma_{s-}^2.)\right) ds.$$

La preuve de ce lemme est identique à la preuve du lemme 4.4.1 du chapitre 4.

Lemme 5.3.2 *Sous (LH_4), si f et g sont à croissance polynomiale alors*

$$\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \left[f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n)g((i-1)\Delta_n, \beta'^n_i) - \mathbb{E}\left\{f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n)g((i-1)\Delta_n, \beta'^n_i)|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}\right]$$

converge u.c.p. vers 0*. quand n tend vers l'infini.*

Preuve Posons

$$\zeta_i^n = \Delta_n \left[f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n)g((i-1)\Delta_n, \beta'^n_i) - \mathbb{E}\left\{f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n)g((i-1)\Delta_n, \beta'^n_i)|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}\right].$$

Remarquons que

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\{\zeta_i^{n2}|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\} \leq Kt\Delta_n.$$

La preuve est alors juste une application du lemme 5-1 de [3]. □

Lemme 5.3.3 *Supposons que pour tout A, $t > 0$ positifs, on ait, avec la notation (5.1.2) :*

$$\mathbb{E}\{G^f(\varepsilon, A)_t\} \longrightarrow 0, \quad \textit{quand } \varepsilon \to 0.$$

On suppose également que f et g sont à croissance respectivement p et p'-polynomiale. On suppose de plus que (LH_4) est vérifiée et que l'une des conditions suivantes est satisfaite

- $p \in [0, 2[$ *et* $p' \in [0, 2]$,
- X *continu et* $p' \in [0, 2]$,
- Y *continu et* $p \in [0, 2[$,
- X *et* Y *continus.*

Alors quand n tend vers l'infini,

$$\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} g\left(i\Delta_n, \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \left[f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \ - \ f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n)\right] \ \to^{u.c.p.} \ 0.$$

Preuve Posons

$$\zeta'^n_i \;=\; g\left(i\Delta_n, \frac{\Delta^n_{i+1}Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right)\left[f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta^n_i X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \;-\; f((i-1)\Delta_n, \beta^n_i)\right].$$

Pour tout $(\omega, s, x) \;\in\; \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on a

$$|f(\omega, s, x)| \leq K[1+|x|^p] \;\text{ et }\; |g(\omega, s, x)| \leq K[1+|x|^{p'}].$$

Vu que

$$\mathbb{E}\left\{\left|g\left(i\Delta_n, \frac{\Delta^n_{i+1}Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right)\right| \;|\mathcal{F}_{i\Delta_n}\right\} \;\leq\; \mathbb{E}\left\{K\left[1+\left|\frac{\Delta^n_{i+1}X}{\sqrt{\Delta_n}}\right|^{p'}\right] \;|\mathcal{F}_{i\Delta_n}\right\} \;\leq\; K$$

et que sous (LH_4), on a

$$\mathbb{E}\{||(X_t, Y_t) - (X_s, Y_s)||^2\} \leq K|t-s|,$$

Il suit s'en suit que

$$\mathbb{E}\{|\zeta'^n_i|\} \;\leq\; K\;\mathbb{E}\left\{\left|f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta^n_i X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \;-\; f((i-1)\Delta_n, \beta^n_i)\right|\right\}. \tag{5.3.1}$$

Soit q un réel tel que : $q > p$ si X est continu et $q = 2$ sinon. Pour tout $B > 0$, on définit :

$$H_B \;=\; K \sup_{\{|x|>B\}} \frac{1+|x|^p}{|x|^q} \quad \text{et} \quad L_B \;=\; K[1+B^p].$$

Il s'en suit que :

$$\left.\begin{array}{llcll} \sup_{\{s\in\mathbb{R}_+,\ |x|>B\}} \frac{|f(\omega,s,x)|}{|x|^q} & \leq & K \sup_{\{|x|>B\}} \frac{1+|x|^p}{|x|^q} & = & H_B \\ \sup_{\{s\in\mathbb{R}_+,\ |x|\leq B\}} |f(\omega, s, x)| & \leq & K[1+B^p] & = & L_B. \end{array}\right\} \tag{5.3.2}$$

Il est clair que

$$|f(\omega, s, x)| \;\leq\; L_B \;+\; H_B|x|^q \quad \text{et que} \quad \lim_{B\to 0} H_B = 0.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$ et $A \geq 0$, on a

$$\left|f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta^n_i X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \;-\; f((i-1)\Delta_n, \beta^n_i)\right| \;\leq\; G^f(\varepsilon, A)$$

$$+\; L_B\left(1_{\left\{\left|\frac{\Delta^n_i X}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta^n_i\right| > \varepsilon\right\}} \;+\; 1_{\{|\beta^n_i|>A\}}\right) \;+\; H_B\left(\left|\frac{\Delta^n_i X}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta^n_i\right|^q \;+ |\beta^n_i|^q\right)$$

Il suit alors d'après (5.3.1) que

$$\mathbb{E}\{|\zeta'^n_i|\} \;\leq\; K\left[\mathbb{E}\{G^f(\varepsilon, A)\} \;+\; L_B\left(\varepsilon^{-2}\mathbb{E}\left\{1 \wedge \left|\frac{\Delta^n_i X}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta^n_i\right|^2\right\} \;+\; \mathbb{E}\left\{\frac{|\beta^n_i|}{A}\right\}\right) \;+\; H_B\right],$$

d'où

$$\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\{|\zeta'^n_i|\} \;\leq\; Kt\left[\mathbb{E}\{G^f(\varepsilon,A)\} \;+\; \frac{1}{A} \;+\; H_B\right] + K\varepsilon^{-2}\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\left\{1 \wedge |\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta_i^n|^2\right\}.$$

En utilisant le lemme 4.1 de [8], on fait tendre successivement n vers l'infini, ε vers 0, A puis B vers l'infini. $\square$

Lemme 5.3.4 *Supposons* (LH_4) *vérifiée*

$$\mathbb{E}\left\{G^g(\varepsilon,A)_t\right\} \;\longrightarrow\; 0 \quad \textit{quand } \varepsilon \to 0, \quad \forall\ A \geq 0.$$

On suppose aussi que f est à croissance au plus polynomiale, g à croissance p-polynomiale et que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite

- (LH_4) *vérifiée et* $p < 2$,
- (LH_4) *vérfiée et* Y *continu.*

Alors,

$$\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f((i-1)\Delta_n,\beta_i^n)\left(g\left(i\Delta_n,\frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \;-\; g(i\Delta_n,\beta'^n_i)\right) \;\to^{u.c.p.}\; 0$$

quand $n \to \infty$.

La preuve de ce lemme est similaire à celle du lemme 5.3.3.

On va énoncer un dernier lemme dont la démonstration que nous omettons n'est pas trés difficile. Rappelons la notation (5.1.3).

Lemme 5.3.5 *Supposons* (LH_4) *vérifiée. On suppose de plus que f et g sont à croissances au plus polynomiales et que*

$$\mathbb{E}\{K^g(\Delta_n,A)_t\} \;\to\; 0, \quad \textit{quand } n \to 0, \quad \forall\ A \geq 0.$$

Alors

$$\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f((i-1)\Delta_n,\beta_i^n)\left(g(i\Delta_n,\beta'^n_i) \;-\; g((i-1)\Delta_n,\beta'^n_i)\right) \;\to^{u.c.p.}\; 0,$$

quand $n \to \infty$.

Preuve du Théorème 5.1.2

Il suffit de prouver le théorème sous les hypothèses renforcées énoncées au début de la section 5.3.1. On pose :

$$\left.\begin{array}{lcl}
U^n(1)_t & = & \Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\{f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n)g((i-1)\Delta_n, \beta'^n_i)|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\}, \\
U^n(2)_t & = & \Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} [f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n)g((i-1)\Delta_n, \beta'^n_i) \\
& & -\mathbb{E}\left\{f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n)g((i-1)\Delta_n, \beta'^n_i)|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}], \\
U^n(3)_t & = & \Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} g\left(i\Delta_n, \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right)\left[f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) - f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n)\right], \\
U^n(4)_t & = & \Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n)\left(g\left(i\Delta_n, \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right) - g(i\Delta_n, \beta'^n_i)\right), \\
U^n(5) & = & \Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n)\left(g(i\Delta_n, \beta'^n_i) \ - \ g((i-1)\Delta_n, \beta'^n_i)\right).
\end{array}\right\} \tag{5.3.3}$$

Il est clair que

$$U_t^n \ = \ \sum_{j=1}^{5} U_t^n(j).$$

On a

$$U^n(1) \ \longrightarrow^{u.c.p.} \ U,$$

d'après le lemme 5.3.1. Ensuite, $U^n(2)$, $U^n(3)$ et $U^n(4)$ convergent u.c.p. vers 0 respectivement d'après les lemmes 5.3.2, 5.3.3 et 5.3.4. Ce qui prouve la première partie du théorème 5.1.2.

Pour la deuxième partie, il suffit de remarquer que d'après le lemme 5.3.5, sous (5.1.6) on a aussi

$$U_t^n(5) \ \longrightarrow^{u.c.p.} \ 0.$$

5.3.2 Preuve des T.C.L.

Préliminaires

Dans ce sous-paragraphe, nous renforçons cetaines hypothèses avant d'énoncer une série de lemmes.

Hypothèse (LM_3) **:** On a (M_3) et de plus, les processus b, $\widetilde{b}$, σ, $\widetilde{\sigma}$, v_s sont uniformément bornés, de même que le processus

$$(\omega, t) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \left(\sup_{s \le t} \left(1 \wedge ||\widetilde{\delta}(\omega, s, x)||^2\right) \right) F(dx).$$

les fonctions $\gamma_k = \gamma$ ne dépendent pas de k et vérifient :

$$\gamma(x) \ \le \ K \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \gamma(x)\, F(dx) \ < \infty.$$

$\square$

Sous (LM_3), les processus (X,Y) et σ peuvent s'écrire sous la forme

$$\left.\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \int_0^t b'_s ds + \int_0^t \sigma_{s-} dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \delta(s,x)\, \underline{\mu}(ds,dx), \\ \sigma_t & = & \sigma_0 + \int_0^t \widetilde{b}'_s ds + \int_0^t \widetilde{\sigma}_{s-} dW_s + \int_0^t v_{s-} dV_s + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \widetilde{\delta} \star (\underline{\mu} - \underline{\nu})(ds,dx), \end{array}\right\} \tag{5.3.4}$$

où

$$b'_s = b_s - \int_{\mathbb{R}} \int_0^t h^{(2)}(\delta(\omega,s,x))\nu(ds,dx), \quad \widetilde{b}'_s = \widetilde{b}_s + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t h'^{(2m)}(\widetilde{\delta}(\omega,s,x))\nu(ds,dx).$$

Fixons f et g deux fonctions de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On supposera que les processus Γ qui interviennent dans la définition 4.1.1 et dans l'hypothèse $(F_1(p))$ et le processus θ qui intervient dans l'hypothèse (Dif') sont uniformément bornés.

Rappelons les variables β_i^n et β'^n_i définies dans (5.1.4) et l'hypothèse (LH_4) introduite dans la preuve du théorème 5.1.2.

Lemme 5.3.6 *Supposons (LH_4) vérifiée, que f soit à croissance p-polynomiale et que g vérifie $(F(p'))$ alors, les processus*

$$V_t^n(1) \;=\; \sqrt{\Delta_n} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \left(g\left(i\Delta_n, \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \;-\; g\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right)\right) \tag{5.3.5}$$

convergent u.c.p. vers 0 *quand* $n \to \infty$ *dans les cas suivants :*

- *X et Y sont continus,*
- *X continu et $p' \in [0,2]$,*
- *$p \in [0,2]$, Y continu,*
- *p , $p' \in [0,2]$.*

La preuve de ce lemme est évidente.

Posons maintenant

$$\zeta_i^n \;=\; \sqrt{\Delta_n} \left[f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) g\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \;-\; f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n) g((i-1)\Delta_n, \beta'^n_i) \right]$$

et

$$V_t^n(2) \;:=\; \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \left[\; \zeta_i^n \;-\; \mathbb{E}\{\; \zeta_i^n \mid \mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \;\}\;\right]. \tag{5.3.6}$$

Lemme 5.3.7 *Supposons (LH_4) vérifiée, que f et g soient optionnelles, localement équicontinues (au sens de la définition 3.1.1). On suppose de plus que f et g sont à croissance respectivement p et p'-polynomiale et que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

– *X et Y sont continus,*
– *X continue et $p' \in [0,1[$,*
– *$p \in [0,1[$, Y continu,*
– *p , $p' \in [0,1[$.*

Alors $V_t^n(2)$ converge u.c.p. vers 0 quand $n \to \infty$.

Preuve Remarquons que $\zeta_i^n = \zeta_i'^n + \zeta_i''^n$ où

$$\zeta_i'^n \;=\; \sqrt{\Delta_n} g\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right)\left(f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \;-\; f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n)\right)$$

et

$$\zeta_i''^n \;=\; \sqrt{\Delta_n} f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n)\left(g\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \;-\; g((i-1)\Delta_n, \beta_i'^n)\right).$$

D'après le lemme 5-1 de [3], il nous suffit de montrer que les sommes

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\left\{\left(\zeta_i'^n\right)^2 |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\} \text{ et } \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\left\{\left(\zeta_i''^n\right)^2 |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\} \text{ convergent u.c.p. vers 0.}$$

Ceci se fait de façon similaire à ce qu'on a fait dans les preuves des lemmes 5.3.3 et 5.3.4.
□

Lemme 5.3.8 *Supposons (LH_5) vérifiée. Soit $\phi\,: \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction optionnelle, vérifiant $(K(\mathbb{R}))$, γ un processus localement borné, làg et adapté. On a*

$$\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \gamma_{(i-1)\Delta_n}\, \phi((i-1)\Delta_n, \beta_i^n) \;\longrightarrow^{u.c.p.}\; \int_0^t \gamma_{s-}\, \rho(\phi(s-, \sigma_{s-}^1 .))\, ds, \quad \textit{quand } n \to \infty.$$

Preuve :

Il suffit d'appliquer le théorème 4.1.2 du chapitre 4 à la fonction $f(\omega, s, x) = \gamma_s(\omega)\phi(\omega, s, x)$.
□

Lemme 5.3.9 *On suppose que f et g sont optionnelles, vérifient $(K(\mathbb{R}))$ et sont à croissance au plus polynomiale. Alors*

$$\begin{aligned} V_t^n(3) \;=\; & \sqrt{\Delta_n} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \big[f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n) g((i-1)\Delta_n, \beta'^n_i) \\ & - \mathbb{E}\left\{f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n) g((i-1)\Delta_n, \beta'^n_i)\; |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}\big] \end{aligned} \qquad (5.3.7)$$

converge en loi stable vers le processus $\mathcal{M}'_t$ défini dans (5.2.6).

Preuve

Posons

$$\gamma_i^n := \sqrt{\Delta_n}\rho(g((i-1)\Delta_n, \sigma^2_{(i-1)\Delta_n}.)) \left[f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n) - \rho(f(i-1)\Delta_n, \sigma^1_{(i-1)\Delta_n}.)\right]$$

et

$$\begin{aligned}\zeta_i^n \quad := \quad & \sqrt{\Delta_n}\Big[f((i-2)\Delta_n, \beta_{i-1}^n)\Big(\ g((i-2)\Delta_n, \beta'^n_{i-1}) - \rho(g((i-2)\Delta_n, \sigma^2_{(i-2)\Delta_n}.))\ \Big) \\ & + \rho(g((i-1)\Delta_n, \sigma^2_{(i-1)\Delta_n}.))\Big(f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n) - \rho(f((i-1)\Delta_n, \sigma^1_{(i-1)\Delta_n}.))\ \Big)\Big].\end{aligned}$$

Par simple calcul, on montre que

$$V_t^n(3) = \sum_{i=2}^{[t/\Delta_n]+1} \zeta_i^n \ + \ \gamma_1^n \ - \ \gamma^n_{[t/\Delta_n]+1}.$$

De même, on montre que

$$\sup_{i \leq [t/\Delta_n]+1} \{|\gamma_i^n| \ + \ |\zeta_i^n|\ \} \ \to 0, \quad \text{en probabilité quand } n \to \infty.$$

Cela veut dire que pour trouver la limite de $V_i^n(3)$, il suffit de trouver la limite de $V'^n(3)_t := \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \zeta_i^n$.

On a clairement que

$$\mathbb{E}\{\zeta_i^n|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\} = 0. \tag{5.3.8}$$

Ensuite, par un usage répété de l'inégalité de Hölder et pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\{\zeta_i^{n2} 1_{\{|\zeta_i^n|>\varepsilon\}}\} \leq \varepsilon^{-1/2} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \left(\mathbb{E}\{(\zeta_i^n)^4\}\right)^{1/2} \left(\mathbb{E}\{|\zeta_i^n|\}\right)^{1/2} \leq Kt\Delta_n^{1/4}\varepsilon^{-1/2}.$$

Il suit alors que

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\{\zeta_i^{n2} 1_{\{|\zeta_i^n|>\varepsilon\}}\} \ \longrightarrow \ 0, \quad \text{quand } n \to \infty. \tag{5.3.9}$$

Soit N une martingale bornée et orthogonale à W. Posons $M_t^n = \mathbb{E}\{\zeta_i^n|\mathcal{F}_t\}$ pour $t \geq (i-1)\Delta_n$. Conditionnellement à $\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}$, ζ_i^n dépend de $W_t - W_{(i-1)\Delta_n}$ pour $t \geq (i-1)\Delta_n$. Il suit par le théorème de representation des martingales que $M_t^n = M^n_{(i-1)\Delta_n} + \int_0^t \eta_s^n dW_s$ pour un certain processus prévisible η^n. On a alors que $(M_t^n - M^n_{(i-1)\Delta_n})(N_t - N_{(i-1)\Delta_n})$ est une martingale d'où :

$$\mathbb{E}\{\zeta_i^n \Delta_i^n N|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\} = \mathbb{E}\{M_{i\Delta_n}\Delta_i^n N|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\} = 0. \tag{5.3.10}$$

D'autre part, $\forall\ j \in \{1, \cdots, m\}$, on a

$$\mathbb{E}\{\zeta_i^n \Delta_i^n W^j|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\} = \Delta_n f((i-2)\Delta_n, \beta^n_{i-1})$$

$$\times\mathbb{E}\left\{g\left((i-2)\Delta_n, \frac{\sum_{k=1}^m \sigma^{2,k}_{(i-2)\Delta_n}\left(W^k_{i\Delta_n}-W^k_{(i-1)\Delta_n}\right)}{\sqrt{\Delta_n}}\right)\frac{\left(W^j_{i\Delta_n}-W^j_{(i-1)\Delta_n}\right)}{\sqrt{\Delta_n}}\;|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}$$

$$+\ \Delta_n\rho(g((i-1)\Delta_n,\sigma^2_{(i-1)\Delta_n}.))$$

$$\times\mathbb{E}\left\{f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\sum_{k=1}^m \sigma^{1,k}_{(i-1)\Delta_n}\left(W^k_{i\Delta_n}-W^k_{(i-1)\Delta_n}\right)}{\sqrt{\Delta_n}}\right)\frac{\left(W^j_{i\Delta_n}-W^j_{(i-1)\Delta_n}\right)}{\sqrt{\Delta_n}}\;|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}.$$

Rappelons que $A(1)$ et $A(2)$ sont définis en (5.2.5). En utilisant le lemme 5.3.8 et le lemme 4.4.1, on montre que

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\mathbb{E}\{\zeta^n_i\Delta^n_i W^j|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\}\ \longrightarrow\ \int_0^t A(2)^j_u\,du. \tag{5.3.11}$$

Ensuite, on a

$$\mathbb{E}\{\zeta^{n2}_i|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\}=\Delta_n f^2((i-2)\Delta_n,\beta^n_{i-1})\left(\rho(g^2((i-2)\Delta_n,\sigma^2_{(i-2)\Delta_n}.))-\rho^2(g((i-2)\Delta_n,\sigma^2_{(i-2)\Delta_n}.))\right)$$

$$+\ \Delta_n\rho^2(g((i-1)\Delta_n,\sigma^2_{(i-1)\Delta_n}.))\left(\rho(f^2((i-1)\Delta_n,\sigma^1_{(i-1)\Delta_n}.))-\rho^2(f((i-1)\Delta_n,\sigma^1_{(i-1)\Delta_n}.))\right)$$

$$+\ 2\Delta_n\rho(g((i-1)\Delta_n,\sigma^2_{(i-1)\Delta_n}.))f((i-2)\Delta_n,\beta^n_{i-1})$$

$$\times\left(\rho\left(f((i-1)\Delta_n,\sigma^1_{(i-1)\Delta_n}.)g((i-2)\Delta_n,\sigma^2_{(i-2)\Delta_n}.)\right)\right.$$

$$\left.-\ \rho(f((i-1)\Delta_n,\sigma^1_{(i-1)\Delta_n}))\rho(g((i-2)\Delta_n,\sigma^2_{(i-2)\Delta_n}))\right).$$

En utilisant une nouvelle fois le lemme 5.3.8 et le fait que f et g vérifient $(K(\mathbb{R}))$, on montre que

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\mathbb{E}\{\zeta^{n2}_i|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\}\ \longrightarrow\ \int_0^t A(1)_u\ du. \tag{5.3.12}$$

Grâce aux relations (5.3.8), (5.3.9), (5.3.10), (5.3.11) et (5.3.12), on peut appliquer le théorème 7.28 de [10] ce qui termine la preuve du lemme. □

Lemme 5.3.10 *On suppose que (LM_3) est vérifiée, que f et g sont optionnelles, C^1 en x, admettent des limites à gauche en s et que les processus $f(\omega,s,0)$ et $g(\omega,s,0)$ sont localement bornés. On suppose aussi que f et g vérifient respectivement $F_1(p)$ et $F_1(p')$. Quant aux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial x}$, on suppose qu'elles sont à croissance polynomiale et qu'elles sont localement équicontinues sur $\mathbb{R}$ (au sens de la définition 3.1.1).*

Alors

$$
\begin{aligned}
V^n(4)_t &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\Bigg[\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \rho(f((i-1)\Delta_n, \sigma^1_{(i-1)\Delta_n}.))\rho(g((i-1)\Delta_n, \sigma^2_{(i-1)\Delta_n}.)) \\
&\quad - \int_0^t \rho(f(s-, \sigma^1_{s-}.))\rho(g(s-, \sigma^2_{s-}.))\, ds\Bigg] \longrightarrow^{u.c.p.} 0, \quad \textit{quand } n \to \infty.
\end{aligned} \tag{5.3.13}
$$

Remarque 5.3.11 • *Dans l'énoncé du lemme, on aurait pu se contenter de dire que f et g sont optionnelles et vérifient l'hypothèse (Dif).*

- *si $g \equiv 1$ on tombe sur le lemme 4.4.7 . Ce lemme peut donc être vue comme une généralisation du lemme 4.4.7.*

Preuve : Exceptionnellement dans cette preuve, $x \in \mathbb{R}^m$ signifie que x est un vecteur ligne (et pas un vecteur colonnes) de dimension m à composantes réelles.

La fonction $x \to f(\omega, s, x)$ étant C^1 et $\frac{\partial f}{\partial x}$ étant à croissance polynomiale, il en est de même pour l'application $y \ \to \ \rho(f(u, y.))$ sur $\mathbb{R}^m$, de plus, on a

$$
\frac{\partial \rho}{\partial y^j}(f(s,y.)) = \int_{\mathbb{R}^m} z^j \frac{\partial f}{\partial x}(s, y^t z)\rho(dz) \quad \forall\, j \in \{1, \cdots, m\}.
$$

(rappelons que ρ désigne la loi gaussienne standard sur $\mathbb{R}^m$). Comme f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont à croissance au plus polynomiale, on déduit de ce qui précéde que pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m$ et pour tout $y,\ y' \in \mathcal{K},\ u \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$
\left.\begin{array}{lll}
|\rho(f(u,y.))| \ + \ \sum_{j=1}^m \left|\frac{\partial \rho}{\partial y^j}(f(u,y.))\right| & \leq & K \\
|\rho(f(u,y.)) - \rho(f(u,y'.))| & \leq & K||y-y'||
\end{array}\right\} \tag{5.3.14}
$$

Revenons à (5.3.13), on a

$$
\begin{aligned}
V^n(4)_t &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \Big[\rho(f((i-1)\Delta_n, \sigma^1_{(i-1)\Delta_n}.))\rho(g((i-1)\Delta_n, \sigma^2_{(i-1)\Delta_n}.)) \\
&\quad - \rho(f(s-, \sigma^1_{s-}.))\rho(g(s-, \sigma^2_{s-}.))\Big]\, ds \ + \ \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \int_{[t/\Delta_n]}^t \rho(f(s-, \sigma^1_{s-}.))\rho(g(s-, \sigma^2_{s-}.))\, ds.
\end{aligned}
$$

Comme f et g sont à croissace polynomiale, il est évident que

$$
\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \int_{[t/\Delta_n]\Delta_n}^t \left|\rho(f(s-, \sigma^1_{s-}.))\rho(g(s-, \sigma^2_{s-}.))\right| ds \ \leq \ Kt\Delta_n^{1/2}.
$$

Afin de démontrer le lemme, il nous suffit de consacrer notre attention à la suite de processus :

$$
\begin{aligned}
V'^n(4)_t &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \Big[\rho(f((i-1)\Delta_n, \sigma^1_{(i-1)\Delta_n}.))\rho(g((i-1)\Delta_n, \sigma^2_{(i-1)\Delta_n}.)) \\
&\quad - \rho(f(s-, \sigma^1_{s-}.))\rho(g(s-, \sigma^2_{s-}.))\Big]\, ds.
\end{aligned}
$$

Ce dernier peut s'écrire sous la forme

$$V'^n(4)_t \;=\; \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \zeta_i^n(s)\, ds,$$

où

$$\zeta_i^n := \rho(f((i-1)\Delta_n, \sigma^1_{(i-1)\Delta_n}.))\rho(g((i-1)\Delta_n, \sigma^2_{(i-1)\Delta_n}.)) \;-\; \rho(f(s-, \sigma^1_{s-}.))\rho(g(s-, \sigma^2_{s-}.)).$$

Posons

$$\zeta'^n_i(s) = \rho(f((i-1)\Delta_n, \sigma^1_{(i-1)\Delta_n}.))\rho(g((i-1)\Delta_n, \sigma^2_{(i-1)\Delta_n}.)) - \rho(f((i-1)\Delta_n, \sigma^1_{s-}.))\rho(g((i-1)\Delta_n, \sigma^2_{s-}.))$$

et

$$\zeta''^n_i = \rho(f((i-1)\Delta_n, \sigma^1_{s-}.))\rho(g((i-1)\Delta_n, \sigma^2_{s-}.)) \;-\; \rho(g(s-, \sigma^2_{s-}.))\rho(f(s-, \sigma^1_{s-}.)).$$

De sorte que

$$\zeta_i^n := \zeta'^n_i \;+\; \zeta''^n_i.$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} \zeta''^n_i \;&=\; \rho(f((i-1)\Delta_n, \sigma^1_{s-}.))\left[\rho(g((i-1)\Delta_n, \sigma^2_{s-}.)) \;-\; \rho(g(s-, \sigma^2_{s-}.))\right] \\ &\quad + \rho(g(s-, \sigma^2_{s-}.))\left[\rho(f((i-1)\Delta_n, \sigma^1_{s-}.)) \;-\; \rho(f(s-, \sigma^1_{s-}.))\right], \end{aligned}$$

il n'est pas difficile de voir, puisque f et g vérifient respectivement $(F(p))$ et $(F(p'))$ que

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} |\zeta''^n_i(s)|\, ds \;\longrightarrow\; 0, \quad \text{quand } n \to \infty,$$

en probabilité.
D'autre part,

$$-\zeta'^n_i = \sum_{j=1}^{2} \zeta'^n_i(j)$$

où

$$\begin{aligned} \zeta'^n_i(1) \;&=\; \rho(f((i-1)\Delta_n, \sigma^1_{(i-1)\Delta_n}.))\Big[\rho(g((i-1)\Delta_n, \sigma^2_{s-}.)) \;-\; \rho(g((i-1)\Delta_n, \sigma^2_{(i-1)\Delta_n}.))\Big], \\ \zeta'^n_i(2) \;&=\; \rho(g((i-1)\Delta_n, \sigma^2_{(i-1)\Delta_n}.))\Big[\rho(f((i-1)\Delta_n, \sigma^1_{s-}.)) \;-\; \rho(f((i-1)\Delta_n, \sigma^1_{(i-1)\Delta_n}.))\Big]. \end{aligned}$$

Considérons l'expression $\zeta'(1)$. En utilisant (5.3.4),on fait une nouvelle décomposition

$$\zeta'^n_i(1) = \sum_{j=1}^{3} \zeta'^n_i(1,j)_s$$

où

$$\left.\begin{array}{rcl}
\zeta'^n_i(1,1)_s & = & \rho(f((i-1)\Delta_n,\sigma^1_{(i-1)\Delta_n}.))\sum_{j=1}^m\left[\frac{\partial\rho}{\partial y^j}(g((i-1)\Delta_n,\sigma^2_{(i-1)\Delta_n}.))\int_{(i-1)\Delta_n}^{s-}\widetilde{b'}^{2,j}_u\,du\right],\\
\zeta'^n_i(1,2)_s & = & \rho(f((i-1)\Delta_n,\sigma^1_{(i-1)\Delta_n}.))\sum_{j=1}^m\left[\frac{\partial\rho}{\partial y^j}(g((i-1)\Delta_n,\sigma^2_{(i-1)\Delta_n}.))\right.\\
& & \times\left(\sum_{k=1}^m\int_{(i-1)\Delta_n}^{s-}\widetilde{\sigma}^{2,j,k}_u\,dW^k_u\;+\;\int_{(i-1)\Delta_n}^{s-}\int_{\mathbb{R}}\widetilde{\delta}^{2,j}(u,x)(du,dx)\;+\right.\\
& & \left.\left.+\;\sum_{k=1}^l\int_{(i-1)\Delta_n}^{s-}v^{2,j,k}_u\,dV^k_u\right)\right],\\
\zeta'^n_i(1,3)_s & = & \rho(f((i-1)\Delta_n,\sigma^1_{(i-1)\Delta_n}.))\left[\rho(g((i-1)\Delta_n,\sigma^2_{s-}.))-\rho(g((i-1)\Delta_n,\sigma^2_{(i-1)\Delta_n}.))\right.\\
& & \left.-\;\sum_{j=1}^m(\sigma^{2,j}_{s-}-\sigma^{2,j}_{(i-1)\Delta_n})\frac{\partial\rho}{\partial y^j}(g((i-1)\Delta_n,\sigma^2_{(i-1)\Delta_n}.))\right].
\end{array}\right\}\tag{5.3.15}$$

Puisque le processus $(\widetilde{b'}_s)$ est borné, il est évident que

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}|\zeta'^n_i(1,1)_s|\,ds\;\le\;Kt\Delta_n^{1/2}.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\zeta'^n_i(1,2)_s\,ds$$

est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_{[t/\Delta_n]\Delta_n})$ dont le crochet est plus petit que $Kt\Delta_n$. Par l'inégalité de Doob, on en déduit que

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\zeta'^n_i(1,2)_s\,ds\;\longrightarrow^{u.c.p.}\;0,\quad\textit{quand}\;n\to\infty.$$

Considérons à présent l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\zeta'^n_i(1,3)_s\,ds.$$

On montre que pour un certain $p\ge 0$, on a pour tout $\varepsilon>0$ et $A>0$,

$$|\zeta'^n_i(1,3)_s|\le K\left[\frac{||\sigma^2_{s-}-\sigma^2_{(i-1)\Delta_n}||}{\varepsilon}\;+\;\frac{1}{A}\;+\;AG^{\frac{\partial g}{\partial x}}(\varepsilon A,KA)_t\right]||\sigma_{s-}-\sigma_{(i-1)\Delta_n}||.$$

Il suit alors que

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\mathbb{E}\{|\zeta'^n_i(1,3)_s|\}\,ds\;\le\;Kt\left[\frac{1}{A}+A\mathbb{E}\{G_t^{\frac{\partial g}{\partial x}}(\varepsilon A,KA)^2\}+\frac{\Delta_n^{1/2}}{\varepsilon}\right],$$

faisant tendre successivement n vers l'infini, ε vers 0 et enfin A vers l'infini, on obtient que

$$\zeta'^n_i(1,3)\;\longrightarrow^{u.c.p.}\;0,\quad\text{quand}\;n\to\infty$$

et par suite que

$$\zeta'^n_i(1) \ \longrightarrow^{u.c.p.} \ 0, \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Le processus $\zeta'^n_i(2)$ se traite pareillement que $\zeta'^n_i(1)$. D'après tout ce qui précède, on peut dire que le lemme est démontré. $\square$

Dans les deux prochains lemmes, on estime la quantité

$$V^n_t(5) := \sqrt{\Delta_n} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\Big\{ f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta^n_i X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) g\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta^n_{i+1} Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right)$$

$$- f((i-1)\Delta_n, \beta^n_i) g((i-1)\Delta, \beta'^n_i) | \mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \Big\}, \tag{5.3.16}$$

On étudiera de façon séparée, le cas continu et le cas discontinu. Commençons par le cas continu. Rappelons que les processus b' et $\widetilde{\sigma}$ ont été définis en (5.3.4).

Lemme 5.3.12 *Supposons (LM_3) vérifiée et que X et Y soient continus. On suppose que f et g sont optionnelles, à croissance au plus polynomiale et C^1 en x. On suppose $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial x}$ sont à croissance au plus polynomiale et qu'elles sont localement équicontinues sur $\mathbb{R}$ (au sens de la définition 3.1.1).*

Si de plus l'une des conditions suivantes est vérifiée :
1. *les application $x \to f(\omega, s, x)$ et $x \to g(\omega, s, x)$ sont paires.*
2. *l'application $x \to f(\omega, s, x)$ est paire et $b^2_s = \widetilde{\sigma}^{2,j,k} \equiv 0$ pour $j,\ k \in \{1, \cdots, m\}$.*
3. *$b^1_s = \widetilde{\sigma}^{1,j,k} = \widetilde{\sigma}^{2,j,k} \equiv 0$ pour $j,\ k \in \{1, \cdots, m\}$ et l'application $x \to g(\omega, s, x)$ est paire.*
4. *On a $b^1 = b^2 = \widetilde{\sigma}^{1,j,k} = \widetilde{\sigma}^{2,j,k} \equiv 0$, pour $j,\ k \in \{1, \cdots, m\}$.*
5. *l'application $x \to g(\omega, s, x)$ est impaire et $b^2_s = \widetilde{\sigma}^{2,j,k} \equiv 0$ pour $j,\ k \in \{1, \cdots, m\}$.*
Alors $V^n_t(5)$ converge u.c.p. vers 0 quand $n \to \infty$

Preuve On pose

$$\left.\begin{array}{rcl} \zeta^n_i(1) & = & f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta^n_i X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \left(g\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta^n_{i+1} Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right) - g((i-1)\Delta, \beta'^n_i)\right), \\ \zeta^n_i(2) & = & g((i-1)\Delta, \beta'^n_i) \left[f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta^n_i X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) - f((i-1)\Delta_n, \beta^n_i)\right]. \end{array}\right\} \tag{5.3.17}$$

De sorte que $V^n_t(5) := \sqrt{\Delta_n} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\{\zeta^n_i(1) + \zeta^n_i(2)\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\}$.

Etape 1 : On veut montrer ici que

$$\sqrt{\Delta_n} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\left\{\zeta^n_i(2)\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\} \ \longrightarrow \ 0. \tag{5.3.18}$$

Faisons la décomposition

$$\zeta^n_i(2) = \sum_{j=1}^{3} \zeta^n_i(2, j) \tag{5.3.19}$$

où

$$\left.\begin{array}{rcl} \zeta_i^n(2,1) & = & g((i-1)\Delta_n,\beta'^n_i)\left[\frac{\partial f}{\partial x}((i-1)\Delta_n,\bar{\gamma}_i^n)-\frac{\partial f}{\partial x}((i-1)\Delta_n,\beta_i^n)\right]\left(\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}-\beta_i^n\right) \\ \zeta_i^n(2,2) & = & g((i-1)\Delta_n,\beta'^n_i)\frac{\partial f}{\partial x}((i-1)\Delta_n,\beta_i^n)\widehat{\xi}_i^{\,1,n} \\ \zeta_i^n(2,3) & = & g((i-1)\Delta_n,\beta'^n_i)\frac{\partial f}{\partial x}((i-1)\Delta_n,\beta_i^n)\widetilde{\xi}_i^{\,1,n}. \end{array}\right\} \quad (5.3.20)$$

où $\bar{\gamma}_i^n$ est entre β_i^n et $\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}$ et où, comme dans (4.4.19) et pour $q=1,2$, on a

$$\begin{aligned} \widehat{\xi}_i^{\,q,n} = & \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\left[\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}(b_s^q-b_{(i-1)\Delta_n}^q)\,ds+\sum_{j=1}^m\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\left(\int_{(i-1)\Delta_n}^s\widetilde{b'}_u^{q,j}\,du\right.\right. \\ & +\sum_{k=1}^m\int_{(i-1)\Delta_n}^s(\widetilde{\sigma}_u^{q,j,k}-\widetilde{\sigma}_{(i-1)\Delta_n}^{q,j,k})\,dW_u^k+\sum_{k=1}^l\int_{(i-1)\Delta_n}^s(v_u^{q,j,k}-v_{(i-1)\Delta_n}^{q,j,k})\,dV_u^k \\ & \left.\left.+\int_{(i-1)\Delta_n}^s\int_{\mathbb{R}}(\widetilde{\delta}^{q,j}(u-,x)-\widetilde{\delta}^{q,j}((i-1)\Delta_n,x))\,(\underline{\mu}-\underline{\nu})(du,dx)\right)\,dW_s^j\right] \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

et

$$\begin{aligned} \widetilde{\xi}_i^{\,q,n} = & \sqrt{\Delta_n}b_{(i-1)\Delta_n}^q+\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{j=1}^m\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\left[\sum_{k=1}^m\widetilde{\sigma}_{(i-1)\Delta_n}^{q,j,k}(W_s^k-W_{(i-1)\Delta_n}^k)\right. \\ & \left.+\sum_{k=1}^l v_{(i-1)\Delta_n}^{q,j,k}(V_s^k-V_{(i-1)\Delta_n}^k)+\int_{(i-1)\Delta_n}^s\int_{\mathbb{R}}\widetilde{\delta}^{q,j}((i-1)\Delta_n,x)(\underline{\mu}-\underline{\nu})(du,dx)\right]\,dW_s^j. \end{aligned} \quad (5.3.22)$$

Soit L'^n_i le processus définit dans (4.4.14). Comme g est à croissance au plus polynomiale, on a $\mathbb{E}\{|g((i-1)\Delta_n,\beta'^n_i)|\ |\mathcal{F}_{i\Delta_n}\}\leq K$ d'où, en utilisant (4.4.17) et par suite (4.4.18), on a

$$\sqrt{\Delta_n}\mathbb{E}\{|\zeta_i^n(2,1)|\}\ \leq\ \sqrt{\Delta_n}\mathbb{E}\{|L'^n_i|\}\ \longrightarrow^{u.c.p.}\ 0, \quad (5.3.23)$$

quand $n\to\infty$. Notons que dans le lemme 4.4.4, on a supposé que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est localement équicontinue, ce qui est plus fort que notre hypothèse actuelle à savoir : $\mathbb{E}\left\{G_T^{\frac{\partial f}{\partial x}}(\varepsilon,A)^2\right\}\to 0$ quand $\varepsilon\to 0$. celle-ci, au vu de (4.4.17) est suffisant pour obtenir (5.3.23). De même, et exactement comme pour (4.4.21), on a

$$\sqrt{\Delta_n}\mathbb{E}\{|\zeta_i^n(2,2)|\}\ \longrightarrow^{u.c.p.}\ 0. \quad (5.3.24)$$

Remarquons que

$$\mathbb{E}\{\zeta_i^n(2,3)\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\}\ =\ \mathbb{E}\left\{g((i-1)\Delta_n,\beta'^n_i)\frac{\partial f}{\partial x}((i-1)\Delta_n,\beta_i^n)\widetilde{\xi}_i^n\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\}$$

$$= \quad \rho(g((i-1)\Delta_n, \sigma^2_{s-}.)) \times \mathbb{E}\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}((i-1)\Delta_n, \beta^n_i)\widetilde{\xi}^{1,n}_i \,\middle|\, \mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \right\}. \tag{5.3.25}$$

Il suit (comme on l'a un peu fait dans (4.4.21)) que :

$$\mathbb{E}\left\{ \zeta^n_i(2,3) \,|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \right\} \;=\; 0, \tag{5.3.26}$$

- si l'application $x \to g(\omega, s, x)$ est impaire (car dans ce cas, $\rho(g((i-1)\Delta_n, \sigma^2_{s-}.)) = 0$),
- si f est paire car la quantité à droite du produit dans (5.3.25) s'annule.
- si $b^1 = \widetilde{\sigma}^{1,j,k} = 0$, pour $j, k \in 1, \cdots, m$ car dans ce cas également (5.3.25) s'annule.

D'après (5.3.19), (5.3.23), (5.3.24) et (5.3.26), on a bien (5.3.18).

Etape 2 : Le but de cette étape est de montrer que :

$$\sqrt{\Delta_n} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\left\{ \zeta^n_i(1) \,|\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \right\} \;\longrightarrow\; 0. \tag{5.3.27}$$

On commence par faire une décomposition de $\frac{\Delta^n_{i+1}Y}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta'^n_i$. Rappelons (5.3.21) et (5.3.22). On a

$$\frac{\Delta^n_{i+1}Y}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta'^n_i \;=\; \widetilde{\xi}^{\,2,n}_{i+1} \;+\; \widetilde{\xi'}^n_i \;+\; \widehat{\xi}^{\,2,n}_{i+1} \;+\; \widehat{\xi'}^n_i, \tag{5.3.28}$$

où

$$\begin{aligned}
\widehat{\xi'}^n_i \;&=\; \sum_{j=1}^m \frac{\Delta^n_{i+1}W^j}{\sqrt{\Delta_n}} \left[\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \widetilde{b'}^{2,j}_u \, du + \sum_{k=1}^m \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} (\widetilde{\sigma}^{2,j,k}_u - \widetilde{\sigma}^{2,j,k}_{(i-1)\Delta_n})\, dW^k_u \right. \\
&+ \sum_{k=1}^l \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} (v^{2,j,k}_u - v^{2,j,k}_{(i-1)\Delta_n})\, dV^k_u \\
&+ \left. \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \int_{\mathbb{R}} (\widetilde{\delta}^{2,j}(u-, x) - \widetilde{\delta}^{2,j}((i-1)\Delta_n, x))\, (\underline{\mu} - \underline{\nu})(du, dx) \right]
\end{aligned}$$

et où,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\xi'}^n_i \;&=\; \sum_{j=1}^m \frac{\Delta^n_{i+1}W^j}{\sqrt{\Delta_n}} \left[\sum_{k=1}^m \widetilde{\sigma}^{2,j,k}_{(i-1)\Delta_n} \Delta^n_i W^k + \sum_{k=1}^l v^{2,j,k}_{(i-1)\Delta_n} \Delta^n_i V^k \right. \\
&+ \left. \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\delta}^{2,j}((i-1)\Delta_n, x)(\underline{\mu} - \underline{\nu})(du, dx) \right].
\end{aligned}$$

On décompose alors $\zeta_i^n(1)$ de la façon suivante : $\zeta_i^n(1)=\sum_{j=1}^4 \zeta_i^n(1,j)$ où

$$\left.\begin{array}{rcl}\zeta_i^n(1,1) &=& f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x}\left((i-1)\Delta_n, \bar{\gamma}_{i+1}^n\right)-\frac{\partial g}{\partial x}\left((i-1)\Delta_n, {\beta'}_i^n\right)\right)\left[\frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}-{\beta'}_i^n\right]\\ \zeta_i^n(1,2) &=& f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right)\frac{\partial g}{\partial x}\left((i-1)\Delta_n, {\beta'}_i^n\right)\left[\widehat{\xi}_{i+1}^{\,2,n}+\widehat{\xi'}_i^n\right],\\ \zeta_i^n(1,3) &=& \left(f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right)-f\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right)\right)\frac{\partial g}{\partial x}\left((i-1)\Delta_n, {\beta'}_i^n\right)\left[\widetilde{\xi}_{i+1}^{\,2,n}+\widetilde{\xi'}_i^n\right]\\ \zeta_i^n(1,4) &=& f\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right)\frac{\partial g}{\partial x}\left((i-1)\Delta_n, {\beta'}_i^n\right)\left[\widetilde{\xi}_{i+1}^{\,2,n}+\widetilde{\xi'}_i^n\right].\end{array}\right\} \tag{5.3.29}$$

Exactement comme dans (5.3.23) et (4.4.18), on montre que

$$\sqrt{\Delta_n}\mathbb{E}\{|\zeta_i^n(1,1)|\} \longrightarrow^{u.c.p.} 0, \text{ quand } n\to\infty \tag{5.3.30}$$

et que

$$\sqrt{\Delta_n}\mathbb{E}\{|\zeta_i^n(1,3)|\} \longrightarrow^{u.c.p.} 0, \text{ quand } n\to\infty \tag{5.3.31}$$

(on utilise dans ce dernier cas le fait que $\mathbb{E}\left\{\left|\widetilde{\xi}_{i+1}^{\,2,n}+\widetilde{\xi'}_i^n\right|^2\right\} \le K\Delta_n$). Ensuite, comme dans (4.4.21)et (5.3.24) on montre que :

$$\sqrt{\Delta_n}\mathbb{E}\{|\zeta_i^n(1,2)|\} \longrightarrow^{u.c.p.} 0, \text{ quand } n\to\infty. \tag{5.3.32}$$

Pour terminer l'étape et par suite la démonstration du lemme, il nous reste à montrer que

$$\sqrt{\Delta_n}\mathbb{E}\{\zeta_i^n(1,4)\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\} \longrightarrow^{u.c.p.} 0, \text{ quand } n\to\infty.$$

On montre que

$$\mathbb{E}\left\{\zeta_i^n(1,4)\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\} = \mathbb{E}\left\{f\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right)\frac{\partial g}{\partial x}\left((i-1)\Delta_n, {\beta'}_i^n\right)\left[\widetilde{\xi}_{i+1}^{\,2,n}+\widetilde{\xi'}_i^n\right]\ \middle|\ \mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\right\} = 0, \tag{5.3.33}$$

car comme on l'a fait dans (4.4.21), si on applique l'espérence condionnelle suivant $\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}$ à l'expression,

$$f\left((i-1)\Delta_n, \beta_i^n\right)\frac{\partial g}{\partial x}\left((i-1)\Delta_n, {\beta'}_i^n\right)\left[\widetilde{\xi}_{i+1}^{\,2,n}+\widetilde{\xi'}_i^n\right],$$

les termes relatifs aux martingales autres que W s'annulent et pour les termes restant, (comme on l'a fait dans (5.3.26)) on joue sur la parité, l'imparité des applications $x\to f(\omega,s,x)$ et $x\to g(\omega,s,x)$ où la nullité des coefficients. On a par exemple (5.3.33) si les applications $x\to f(\omega,s,x)$ et $x\to g(\omega,s,x)$ sont paires, ou si $b^2=\widetilde{\sigma}^{2,j,k}=0$, pour $j,k\in\{1,\cdots,m\}$. En énumérant ainsi toutes les conditions nécessaires pour avoir (5.3.33), et en faisant un "croisement" de ces conditions avec celles de l'étape 1 et qui sont nécessaires pour avoir (5.3.26), on achève la démonstration du lemme. □

On va maintenant passer au cas discontinu. Rappelons le prosessus $\widetilde{\sigma}$, voir (5.3.4) et rappelons

$$\widehat{b}^1 = b^1-\int_{\mathbb{R}} h(\delta^1(s-,x))\,F(dx)$$

et

$$\widehat{b}^2 = b^2-\int_{\mathbb{R}} h(\delta^2(s-,x))\,F(dx).$$

Lemme 5.3.13 *Supposons (LM_3) vérifiée, que f et g soient optionnelles, C^1 en x que f, $\frac{\partial f}{\partial x}$, g, $\frac{\partial g}{\partial x}$ soient à croissance polynomiale. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial x}$ soient localement équicontinues.*

On suppose de plus que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

1. *Les application $x \to f(\omega, s, x)$ et $x \to g(\omega, s, x)$ sont paires,*

2. *l'application $x \to f(\omega, s, x)$ est paire et $\widehat{b}^2 = \widetilde{\sigma}^{2,j,k} \equiv 0$*

3. *$\widehat{b}^1 = \widetilde{\sigma}^{1,j,k} = \widetilde{\sigma}^{2,j,k} \equiv 0$, l'application $x \to g(\omega, s, x)$ est paire.*

4. *On a $\widehat{b}^1 = \widehat{b}^2 = \widetilde{\sigma}^{1,j,k} = \widetilde{\sigma}^{2,j,k} \equiv 0$.*

5. *g impaire et $\widehat{b}^2 = \widetilde{\sigma}^{2,j,k} \equiv 0$.*

On suppose également que l'une des hypothèses suivantes soit réalisée :

- *X et Y sont continus.*
- *Y continu et f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont bornées,*
- *X continu, g et $\frac{\partial g}{\partial x}$ sont bornées,*
- *f, g, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ sont bornées.*

Alors

$$V_t^n(5) \longrightarrow^{u.c.p.} 0, \quad \textit{quand } n \to \infty.$$

Preuve

On peut écrire

$$V^n(5)_t = V'^n(5)_t \; + \; V''^n(5)_t \tag{5.3.34}$$

où

$$V'^n_t(5) = \sqrt{\Delta_n} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \zeta_i^n(1)$$

et

$$V''^n_t(5) \;=\; \sqrt{\Delta_n} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \zeta_i^n(2),$$

où on a utilisé les notations (5.3.17). Remarquons que,

$$\begin{aligned} V''^n_t(5) \;&=\; \sqrt{\Delta_n} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \Big(\mathbb{E}\{g((i-1)\Delta, \beta'^n_i) | \mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\} \\ &\mathbb{E}\left\{ f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) - f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n) | \mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \right\} \Big), \end{aligned} \tag{5.3.35}$$

il suit que

$$V''^n_t(5) \;\leq\; K\sqrt{\Delta_n} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \left| \mathbb{E}\left\{ f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) - f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n) | \mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \right\} \right|. \tag{5.3.36}$$

Dans les preuves des lemmes 5.3.12 et 4.4.5, il est montré que

$$\sqrt{\Delta_n} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \left| \mathbb{E}\left\{ f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) - f((i-1)\Delta_n, \beta_i^n) \middle| \mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n} \right\} \right| \;\longrightarrow^{u.c.p.}\; 0, \tag{5.3.37}$$

il suit d'après (5.3.36), sous les hypothèses X continu où X discontinue et f, $\frac{\partial f}{\partial x}$ bornés, que

$$V''^n_t(5) \longrightarrow^{u.c.p.} 0. \tag{5.3.38}$$

Afin de démontrer le lemme, il nous faudra donc montrer que

$$V''^n_t(5) \longrightarrow^{u.c.p.} 0, \tag{5.3.39}$$

dans les cas suivants (le cas où X et Y sont continus étant déjà vu dans le lemme 5.3.12) :

- X continu et Y discontinu,
- X discontinu et Y continu
- X et Y discotinus.

On montre (5.3.39) de façon similaire à ce qui a été fait dans les preuves des lemmes 4.4.5 et 5.3.12.

Preuve proprement dite du théorème

Posons

$$V^n_t := \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\left[\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f\left((i-1)\Delta_n, \frac{\Delta^n_i X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) g\left(i\Delta_n, \frac{\Delta^n_{i+1} X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) - \int_0^t \rho(f(u-,\sigma_{u-}.))\rho(g(u-,\sigma_{u-}.))\,ds\right].$$

Rappelons 5.3.5, 5.3.6, 5.3.7, 5.3.13, 5.3.16. On a

$$V^n_t := \sum_{j=1}^{5} V^n_t(j).$$

D'après le lemme 5.3.9, $V^n_t(3)$ converge en loi stable vers la limite $\mathcal{M}'_t$ alors que Les processus $V^n_t(1)$, $V^n_t(2)$, $V^n_t(4)$ et $V^n_t(5)$ convergent u.c.p. vers 0 d'après les lemmes 5.3.6, 5.3.7, 5.3.10 et 5.2.6.

5.3.3 Preuves des théorèmes 5.1.4 et 5.2.2

Preuve du théorème 5.1.4

Commençons par le lemme suivant.

Lemme 5.3.14 *Supposons que Z soit une semimartingale continue (quelconque) où que Z vérifie (N_4). Soit f et g deux fonctions de R^{d+1} dans $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^{d+1}$ et que f et g vérifient :*
pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$, il existe une constante C_K et un réel positif p tels que

$$\sup_{\{z\in\mathcal{K}\}} (|f(z,x)| + |g(z,x)|) \leq C_{\mathcal{K}}[1 + |x|^p].$$

Alors

$$\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f(Z_{(i-1)\Delta_n}, \beta^n_i)\left[g(Z_{i\Delta_n}, \beta'^n_i) - g(Z_{(i-1)\Delta_n}, \beta'^n_i)\right]$$

converge u.c.p. vers 0 quand $n \to \infty$.

Preuve Fixons un compact $\mathcal{K}$ assez large de $\mathbb{R}^d$ et supposons que $Z \in \mathcal{K}$ Posons

$$\zeta_i^n = \Delta_n f(Z_{(i-1)\Delta_n}, \beta_i^n) \left(g(Z_{(i-1)\Delta_n}, {\beta'}_i^n) - g(Z_{i\Delta_n}, {\beta'}_i^n) \right).$$

Pour $A, \varepsilon > 0$, on a

$$|\zeta_i^n| \;\leq\; \Delta_n C_K [1+|\beta_i^n|^p] \left(\; 2C_K [1 + |{\beta'}_i^n|^p] 1_{\{|{\beta'}_i^n| > A\}} \;+\; 2C_K [1 + A^p] 1_{\{||Z_{i\Delta_n} - Z_{(i-1)\Delta_n}|| > \varepsilon\}} \;+\; G^g(\varepsilon, A) \right),$$

où

$$G^g_{\mathcal{K}}(\varepsilon, A) \;=\; \sup_{\{z,\; z' \in K,\; ||z-z'|| < \varepsilon;\; |x| \leq A\}} |g(z,x) - g(z',x)|.$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\{|\zeta_i^n|\} \;\leq\; Ct \left[\frac{1}{A^{1/2}} \;+\; G^g_{\mathcal{K}}(\varepsilon, A) \right] + C(A)\varepsilon^{-1} \left(\; \Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\left\{ 1 \wedge ||Z_{i\Delta_n} - Z_{(i-1)\Delta_n}||^2 \right\} \right)^{1/2}$$

où C est une constante assez grand et où $C(A)$ est une constante qui dépend de A. En utilisant le lemme 4.1 de [8], on fait tendre $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ et $A \to \infty$ ce qui donne le résultat dans le cas où $Z \in \mathcal{K}$. Le cas général s'obtient par une procédure classique de délocalisation.

Preuve du théorème 5.1.4 : Le théorème 5.1.4 résulte du cas 1.a du théorème 5.1.2 et du lemme 5.3.14.

Preuve du théorème 5.2.4

Soit $f:\; \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, et $g:\; \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d'} \to \mathbb{R}$ des fonctions boréliennes. On commence par renforcer l'hypothèse (N_4) de la façon suivante :

Hypothèse (LN_4) **:** On a (N_4) et les processus $Z,\; Z',\; b',\; \widetilde{b},\; \sigma',\; \widetilde{\sigma},\; v$ sont uniformément bornés de même que le processus

$$(\omega, t) \;\to\; \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=3}^{2+d} \left(1 \wedge {\delta'}^j(\omega, t, x)^2 \right) \;+\; \sup_{s \leq t} \left\{ \; 1 \wedge ||\widehat{\delta}(\omega, s, x)||^2 \; \right\} \right) \; F(dx).$$

de plus, les fonctions $\gamma_k = \gamma$ et $\phi_k = \phi$ ne dépendent pas de k et vérifient

$$\gamma(x) \;+\; \phi(x) \;\leq\; C \;\; \text{et} \;\; \int_{\mathbb{R}} \left(\gamma(x) + \phi(x)^2 \right) \; F(dx) \;< \infty.$$

Sous l'hypothèse (LN_4), on a

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \\ Z_t \\ Z'_t \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ Z'_0 \end{pmatrix} + \int_0^t b''_s ds + \int_0^t \sigma'_{s-}\, dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \delta'(s-, x)\, (\underline{\mu} - \underline{\nu})(ds, dx), \quad (5.3.40)$$

où $b''_s = b'_s + \int_{\mathbb{R}} h'^{(2+d+d')}(\delta'(s-,x))\, F(dx)$ et

$$\begin{pmatrix} \sigma_t'^{1,1}, \cdots, \sigma_t'^{1,m} \\ \sigma_t'^{1,2}, \cdots, \sigma_t'^{2,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0'^{1,1}, \cdots, \sigma_0'^{1,m} \\ \sigma_0'^{2,1}, \cdots, \sigma_0'^{2,m} \end{pmatrix} + \int_0^t \widetilde{b}_s ds + \int_0^t \widetilde{\sigma}_{s-} dW_s$$
$$+ \int_0^t v_{s-} dV_s + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \widetilde{\delta}(s-,x)\,(\underline{\mu} - \underline{\nu})(ds,dx), \quad (5.3.41)$$

où $\widetilde{b'}_s = \widetilde{b}_s + \int_{\mathbb{R}} h'^{(2\times m)} \widetilde{\delta}(s-,x))\, F(dx)$.

On rappelle les notations de (5.1.4) :

$$\beta_i^n := \sum_{j=1}^m \sigma_{(i-1)\Delta_n}'^{1,j} \frac{\Delta_i^n W^j}{\sqrt{\Delta_n}}, \quad \text{et} \quad \beta'^n_i := \sum_{j=1}^m \sigma_{(i-1)\Delta_n}'^{2,j} \frac{\Delta_{i+1}^n W^j}{\sqrt{\Delta_n}}.$$

Lemme 5.3.15 *Supposons* (N_4) *vérifiée. On suppose également que pour* $j = 1, \cdots, d'$, *les fonctions* $\frac{\partial g}{\partial z'^j}$ *existent et sont continues sur* $\mathbb{R}^{d'+1}$. *On suppose que* f *est borélienne et que pour tout compact* $K \in \mathbb{R}^d$, *il existe une constante* C_K *et un réel* $p \geq 0$ *tel qu'on ait*

$$\sup_{z \in K} |f(z,x)| \leq C_K, \quad \sup_{z' \in K} \left(\sum_{j=1}^d \left| \frac{\partial g}{\partial z^j}(z,x) \right| \right) \leq C_K[1 + |x|^p].$$

On suppose que p *est quelconque si* Y *est continu et appartient à* $[0,2[$ *sinon.*

Si de plus, l'une des conditions suivantes est satisfaite :
- *l'application* $x \to f(z,x)$ *est paire ;*
- *l'application* $x \to g(z',x)$ *est impaire ;*
- $\sigma'^{j,k} \equiv 0$ *pour* $3 \leq j \leq 2+d;\ 1 \leq k \leq m$.

Alors,

$$U_t^n(1) = \sqrt{\Delta_n} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \left[g\left(Z'_{(i-1)\Delta_n}, \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right) - g\left(Z'_{i\Delta_n}, \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right)\right] \quad (5.3.42)$$

converge u.c.p. vers 0 *quand* n *tend vers l'infini.*

Preuve : Soit (ε_n), une suite tendant vers 0. On a la décomposition suivante où les $\delta_i^n(k)$ sont définis comme ci-dessus avec les vecteurs aléatoires Z'^m_i entre $Z'_{(i-1)\Delta_n}$ et $Z'_{i\Delta_n}$ et (ε_n) une suite destinée à tendre vers 0. On a alors

$$U_t^n = \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \sum_{k=1}^5 \delta_i^n(k) \quad (5.3.43)$$

et (rappelons que $\phi = \phi_k$ intervient dans (N_4)) :

$$\begin{aligned}
\delta_i^n(1) &= \sqrt{\Delta_n} f\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, \tfrac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \textstyle\sum_{j=1}^{d'} \frac{\partial g}{\partial z'^j}\left(Z'^n_i, \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \left[\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} b_s''^{2+d+j}\, ds\right.\\
&\quad + \textstyle\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \int_{\{\phi(x)\le\varepsilon_n\}} \delta'^{2+d+j}(s,z)(\underline{\mu}-\underline{\nu})(ds,dx)\\
&\quad + \textstyle\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \int_{\{\phi(x)>\varepsilon_n\}} \delta'^{2+d+j}(s,x)\underline{\mu}(ds,dx)\\
&\quad \left. - \textstyle\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \int_{\{\phi(x)>\varepsilon_n\}} \delta'^{2+d+j}(s,z)\, F(dx)ds\right].\\
\delta_i^n(2) &= \sqrt{\Delta_n} f\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, \tfrac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) \textstyle\sum_{j=1}^{d'} \frac{\partial g}{\partial z'^j}\left(Z'^n_i, \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right)\\
&\quad \times \textstyle\sum_{k=1}^{m} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} (\sigma_s'^{2+d+j,k} - \sigma_{(i-1)\Delta_n}'^{2+d+j,k})\, dW_s^k\\
\delta_i^n(3) &= \sqrt{\Delta_n}\left(f\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, \tfrac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}}\right) - f\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, \beta_i^n\right)\right) \textstyle\sum_{j=1}^{d'} \frac{\partial g}{\partial z'^j}\left(Z'^n_i, \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right)\\
&\quad \times \textstyle\sum_{k=1}^{m} \sigma_{(i-1)\Delta_n}'^{2+d+j,k} \Delta_i^n W^k\\
\delta_i^n(4) &= \sqrt{\Delta_n} f\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, \beta_i^n\right) \textstyle\sum_{j=1}^{d'} \left(\frac{\partial g}{\partial z'^j}\left(Z_i^n, \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}}\right) - \frac{\partial g}{\partial z'^j}\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, \beta'^n_i\right)\right)\\
&\quad \times \textstyle\sum_{k=1}^{m'} \sigma_{(i-1)\Delta_n}^{2+d+j,k} \Delta_i^n W^k\\
\delta_i^n(5) &= \sqrt{\Delta_n} f\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, \beta_i^n\right) \textstyle\sum_{j=1}^{d'} \frac{\partial g}{\partial z'^j}\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, \beta'^n_i\right) \sum_{k=1}^{m} \sigma'^{2+d+j,k}_{(i-1)\Delta_n} \Delta_i^n W^k.
\end{aligned}$$

Posons $\theta(\varepsilon_n) = \int_{\{\phi(z)\le\varepsilon_n\}} \phi^2(x)F(dx)$. Il n'est pas difficile de voir que

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\{|\delta_i^n(1)|\} \le Kt\left[\Delta_n^{1/2} + \theta(\varepsilon_n)^{1/2} + \varepsilon_n^{-1}\Delta_n^{1/2}\right]. \tag{5.3.44}$$

En remarquant que $\theta(\varepsilon_n) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$ et en choisissant $\varepsilon_n = \Delta_n^{1/4}$, on déduit que :

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \delta_i^n(1) \longrightarrow^{u.c.p.} 0, \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Par ailleurs, on a

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\{|\delta_i^n(2)|\} \le Kt^{1/2} \sum_{j=1}^{d'}\sum_{k=1}^{m} \left(\int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \mathbb{E}\left\{\left|\sigma_s'^{2+d+j,l} - \sigma_{[s/\Delta_n]\Delta_n}'^{2+d+j,l}\right|^2\right\} ds\right)^{1/2}. \tag{5.3.45}$$

Il suit par le théorème de Lebesgue et la propriété de continuité de σ' que

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \delta_i^n(2) \longrightarrow^{u.c.p.} 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Pour tout A et ε strictement positifs, posons

$$\begin{aligned}
G^f(\varepsilon, A) &= \sup\Big\{|f(z_1, x+y) - f(z_2, x)|, \quad (z_1, x+y),\ (z_2, x) \in \mathbb{R}^{d+1};\\
&\qquad ||z_1||,\ ||z_2|| \le K;\ |x| \le A,\ ||(z_1, x+y) - (z_2, x)|| \le \varepsilon\ \Big\}.
\end{aligned}$$

Remarquons alors que :

$$|\delta_i^n(3)| \leq K\Delta_n \sum_{k=1}^{m} \frac{\Delta_i^n W^k}{\sqrt{\Delta_n}} \left[G^f(\varepsilon, A) + 1_{\{|\beta_i^n|>A\}} + 1_{\left\{\left|\frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta_i^n\right| > \varepsilon\right\}} \right] \left(1 + \left| \frac{\Delta_{i+1}^n Y}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta_i'^n \right|^p + |\beta_i'^n|^p \right).$$

Il suit alors que

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\{|\delta_i^n(3)|\} \leq Kt \left[G^f(\varepsilon, A) + \frac{1}{A} \right] + Kt^{1/2}\varepsilon^{-1} \left(\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \mathbb{E}\left\{ 1 \wedge \left| \frac{\Delta_i^n X}{\sqrt{\Delta_n}} - \beta_i^n \right|^2 \right\} \right)^{1/2},$$

en utilisant le lemme 4.1 de [8] et en faisant tendre $n \to \infty,\ \varepsilon \to 0,\ A \to \infty$ on a

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \delta_i^n(3) \longrightarrow^{u.c.p.} 0, \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

De façon similaire, on montre que

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \delta_i^n(4) \longrightarrow^{u.c.p.} 0, \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Remarquons à présent que sous les hypothèses du lemme, on a : $\mathbb{E}\{\delta_i^n(5)\ |\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}\} = 0$. il suit que $\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \delta_i^n(5)$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{[t/\Delta_n]\Delta_n})$. De plus, il n'est pas difficile de voir que son crochet prévisible est plus petit que $Kt\Delta_n$. On en déduit par l'inégalité de Doob que

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \delta_i^n(5) \longrightarrow^{u.c.p.} 0, \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

D'après tout ce qui précède et d'après (5.3.43), on a bien que

$$U_t^n \longrightarrow^{u.c.p.} 0, \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

ce qui finit la preuve. $\square$

Le prochain lemme est une version du lemme 5.3.10. En d'autres termes, on essaiera d'estimer la quantité $U_t^n(2)$ définie par

$$\begin{aligned} U_t^n(2) &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \left[\Delta_n \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \rho(f(Z_{(i-1)\Delta_n}, \sigma'^1_{(i-1)\Delta_n}.))\rho(g(Z'_{(i-1)\Delta_n}, \sigma'^2_{(i-1)\Delta_n}.)) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \rho(f(Z_s, \sigma'^1_s.))\rho(g(Z'_s, \sigma'^2_s.))\, ds \right]. \end{aligned} \tag{5.3.46}$$

Lemme 5.3.16 *On suppose (N_4) vérifié, que f et g soient C^1 respectivement sur $\mathbb{R}^{d+1}$ et $\mathbb{R}^{d'+1}$. On suppose que pour tous compacts $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{K}' \subset \mathbb{R}^{d'}$, il existe des réels positifs $p(\mathcal{K})$ et $K(\mathcal{K}')$ tels que*

$$\begin{array}{lcl} \sup_{z\in\mathcal{K}} \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}(z,x)\right| + \sum_{j=1}^{d}\left|\frac{\partial f}{\partial z^j}(z,x)\right|\right) & \leq & C\ (\ 1+|x|^p\ ) \\ \sup_{z'\in\mathcal{K}'} \left(\left|\frac{\partial g}{\partial x}(z',y)\right| + \sum_{j=1}^{d}\left|\frac{\partial g}{\partial z'^j}(z',y)\right|\right) & \leq & C\ (\ 1+|y|^p\ ). \end{array}$$

Alors

$$U_t^n(2) \ \longrightarrow^{u.c.p.}\ 0, \quad \textit{quand } n \to \infty.$$

Preuve : On a

$$U_t^n(2) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} (\eta_i^n(s) + \eta'^n_i(s))\, ds + \int_{[t/\Delta_n]\Delta_n}^{t} \rho(f(Z_s,\sigma'^1_s.))\rho(g(Z'_s,\sigma'^2_s.))\, ds,$$

où

$$\eta_i^n(s) := \ \rho(f(Z_{(i-1)\Delta_n},\sigma'^1_{s-}.))\rho(g(Z'_{(i-1)\Delta_n},\sigma'^2_{s-}.)) \ - \ \rho(f(Z_{s-},\sigma'^1_{s-}.))\rho(g(Z'_{s-},\sigma'^2_{s-})).$$

et

$$\begin{array}{rcl} \eta'^n_i & := & \rho(f(Z_{(i-1)\Delta_n},\sigma'^1_{(i-1)\Delta_n}.))\rho(g(Z'_{(i-1)\Delta_n},\sigma'^2_{(i-1)\Delta_n}.)) \\ & & -\ \rho(f(Z_{(i-1)\Delta_n},\sigma'^1_{s-}.))\rho(g(Z_{(i-1)\Delta_n},\sigma'^2_{s-}.)). \end{array}$$

On a vu dans la preuve du lemme 5.3.10 que d'une part

$$\int_{[t/\Delta_n]\Delta_n}^{t} \left|\rho(f(Z_s,\sigma'^1_s.))\rho(g(Z'_s,\sigma'^2_s.))\right| ds \ \longrightarrow\ 0, \quad \text{quand}\ \ n\to\infty$$

et que d'autre part,

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \eta'^n_i(s)\, ds \ \longrightarrow^{u.c.p.}\ 0, \quad \text{quand}\ \ n\to\infty.$$

Il nous suffira donc ici de prouver que

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} \eta_i^n(s)\, ds \ \longrightarrow^{u.c.p.}\ 0, \quad \text{quand}\ \ n\to\infty. \tag{5.3.47}$$

Pour tout quadriplet $(x,y,z,z') \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$, on définit

$$G(z,z',x,y) \ = \ \rho(f(z,x.))\rho(g(z',y.)). \tag{5.3.48}$$

Comme f et g sont C^1 respectivement sur $\mathbb{R}^{d+1}$ et $\mathbb{R}^{d'+1}$, il en est de même pour G sur $\mathbb{R}^{2m+d+d'}$. De plus vu nos hypothèses sur f et g, pour tout compact $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}^{2m+d+d'}$, on a :

$$\begin{array}{l} \sup_{(z,z',x,y)\in\mathcal{K}} \left\{|G(z,z',x,y)| + \sum_{j=1}^{d}\left|\frac{\partial G}{\partial x^j}(z,z',x,y)\right| + \sum_{j=1}^{d'}\left|\frac{\partial G}{\partial y^j}(z,z',x,y)\right|\right. \\ \qquad\left. + \sum_{j=1}^{d}\left|\frac{\partial G}{\partial z^j}(z,z',x,y)\right| + \sum_{j=1}^{d'}\left|\frac{\partial G}{\partial z'^j}(z,z',x,y)\right|\right\} \ \leq K. \end{array}$$

D'après ce qui précède,

$$\eta_i^n(s) \;=\; G\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, Z'_{(i-1)\Delta_n}, \sigma'^1_{s-}, \sigma'^2_{s-}\right) \;-\; G\left(Z_{s-}, Z'_{s-}, \sigma'^1_{s-}, \sigma'^2_{s-}\right).$$

Vu que σ'^1 et σ'^2 sont des vecteurs lignes, on devrait noter $G\left(Z, Z', \left(\sigma'^1\right)^t, \left(\sigma'^2\right)^t\right)$ à la place de $G\left(Z, Z', \sigma'^1, \sigma'^2\right)$. Cette dernière nous permet d'allger la notation.

On a

$$\eta_i^n(s) = \,-\left(\eta_i^n(1)(s) \;+\; \eta_i^n(2)(s)\right),$$

où

$$\begin{aligned}
\eta_i^n(1)(s) \quad = \quad & G\left(Z_{s-}, Z'_{s-}, \sigma'^1_{s-}, \sigma'^2_{s-}\right) \;-\; G\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, Z'_{(i-1)\Delta_n}, \sigma'^1_{s-}, \sigma'^2_{s-}\right) \\
& -\; \textstyle\sum_{j=1}^{d}(Z^j_{s-} - Z^j_{(i-1)\Delta_n})\frac{\partial G}{\partial z^j}\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, Z'_{(i-1)\Delta_n}, \sigma'^1_{(i-1)\Delta_n}, \sigma'^2_{(i-1)\Delta_n}\right) \\
& -\; \textstyle\sum_{j=1}^{d'}(Z'^j_{s-} - Z'^j_{(i-1)\Delta_n})\frac{\partial G}{\partial z'^j}\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, Z'_{(i-1)\Delta_n}, \sigma'^1_{(i-1)\Delta_n}, \sigma'^2_{(i-1)\Delta_n}\right)
\end{aligned} \tag{5.3.49}$$

et

$$\begin{aligned}
\eta_i^n(2)(s) \quad = \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{d}\left(Z^j_{s-} - Z^j_{(i-1)\Delta_n}\right)\frac{\partial G}{\partial z^j}\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, Z'_{(i-1)\Delta_n}, \sigma'^1_{(i-1)\Delta_n}, \sigma'^2_{(i-1)\Delta_n}\right) \\
& \textstyle\sum_{j=1}^{d'}\left(Z'^j_{s-} - Z'^j_{(i-1)\Delta_n}\right)\frac{\partial G}{\partial z'^j}\left(Z_{(i-1)\Delta_n}, Z'_{(i-1)\Delta_n}, \sigma'^1_{(i-1)\Delta_n}, \sigma'^2_{(i-1)\Delta_n}\right).
\end{aligned} \tag{5.3.50}$$

Revenons à la démonstration du lemme 5.3.10, comme pour les termes $\zeta'^n_i(1,1)(s)$, $\zeta'^n_i(1,2)(s)$ et $\zeta'^n_i(1,3)(s)$ de (5.3.15)(où Z et Z' jouent ici tour à tour le rôle de σ^2), on montre d'une part que

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\eta_i^n(1)(s)\,ds \;\longrightarrow^{u.c.p.}\; 0, \quad \text{quand} \;\; n \to \infty,$$

d'autre part que

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]}\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n}\eta_i^n(2)(s)\,ds \;\longrightarrow^{u.c.p.}\; 0, \quad \text{quand} \;\; n \to \infty,$$

d'où (5.3.47) et la preuve du lemme.

Preuve des Théorèmes : Le théorème 5.2.4 se démontre comme le théorème 5.2.2 sauf que l'on utilise les lemmes 5.3.15 et 5.3.16 à la place des lemmes 5.3.6 et 5.3.10.

Bibliographie

[1] Barndorff-Nielsen O., Shephard N. (2003) : Realized power variation and stochastic volatility models. Bernoulli, **9** (2), 243-265.

[2] Barndorff-Nielsen O., Shephard N. (2004) : Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps, Journal of Financial Econometrics, **2** 1-48.

[3] Barndorff-Nielsen O., Graversen S., Jacod J., Podolskij M., Shephard N. (2006) :*A central limit theorem for realised bipower variation of continuous semimartingales*, in : Yu. Kabanov, R. Liptser, J. Stoyanov (Eds), From stochastic calculus to mathematical finance, The Shiryaev festschrift, Springer Verlag, Berlin pp. 33-69.

[4] Becker, E.(1998) : Théorèmes Limites pour des processus discrétisées. Thèse, Univ. Paris 6.

[5] Blumenthal R.M., Getoor R.K. (1960) : Some theorems on stable processes. Trans. Amer. Math. Soc. **95**, 263-273.

[6] Blumenthal R.M., Getoor R.K. (1961) : Sample functions of stochastic processes with stationary independants increments. J. Math. Mech. **10**, 493-516.

[7] Bretagnolle, J. (1972) : P-variation de fonctions aléatoires. Sém. Proba. IV, Lecture Notes in Math. **258.** Berlin-Heidelberg-New York : Springer.

[8] Jacod, J. (2008) : Asymptotic properties of realized power variations and related functionals of semimartingales. *Stochastic processes and their Applications*,**118**, 517–559.

[9] Jacod, J.(2007) Asymtotic properties of power variation of levy processes.*ESAIM Probab. Stat.*, **11**, 173–196.

[10] Jacod, J. and A. Shiryaev (2003) : *Limit Theorems for Stochastic Processes*, 2nd ed., Springer-Verlag : Berlin.

[11] Jacod J., A. Jakubowski, J. Mémin (2003) : On asymptotic error in discretization of processes. *Annals Probab.*, **31**, 592–608.

[12] Jacod, J. and Protter, P. (1998) : Asymptotic error distributions for the Euler method for stochastic differential equations. *Ann. Probab.*, **26**, 267-307.

[13] Jacod, J. (2001) : Inference for stochastic processes. Prépublication.

[14] Lépingle, D. (1976) : La variation d'ordre p des semimartingales. *Z. für Wahr. Th.*, **36**, 285–316.

[15] Lévy, P. (1940) : Le mouvement brownien plan. Amer. J. Math. **62**, 487-550.

[16] Mancini, C. (2007) : Estimating the integrated volatility in stochastic volatility models with Lévy type jumps. Technical report, Univ. Firenze.

[17] Monroe, I. (1972) : On the γ-variation of processes with stationary independants increments. Ann. Math. Statist. **43**, 1213-1220.

[18] Protter, P. (2004) : Stochastic Integration and Differental Equations. *Springer.*

[19] Tukey, J.W. (1939) On the distribution of the fractional part of a statistical variable. Mat Sb. (N.S.) 4 561-562

[20] Woerner, J. (2006) Power and multipower variation : Inference for high frequency data, in A. N. Shiryaev, M. do Rosário Grosshino, P. Oliviera, M. Esquivel (Eds.), Stochastic Finance, Springer, pp. 343-354.